ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 2 : :: Heft 3 ::
Juni 1922 Seite 165 bis 232

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

WIEGHARDT, Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage / WEBER, Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche / ALT, Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen / RIEBESELL, Korrelationsmethode / SCHREIBER, Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE:

HOFF, Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik / Elektrotechnik

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Voigtländer

Präzisions-Instrumente

in anerkannt vorzüglicher Ausführung

Prismen-gläser

*

Jagdgläser

*

Ziel-fernrohre

Theater- und Reise-gläser

*

Lupen

*

Mikro-skope

Kameras — Optik
für alle Zwecke der Photographie

Zu haben in allen guten Fachgeschäften
Druckschriften kostenlos

Voigtländer & Sohn,

Aktiengesellschaft
Optische Werke * Braunschweig

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende Juni 1922** **Heft 3**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. K. Wieghardt: Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage	165
C. Weber: Ueber die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche	185
H. Alt: Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen	187
P. Riebesell: Ueber die Korrelationsmethode	195
P. Schreiber: Ueber die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$	200
Zusammenfassende Berichte. W. Hoff: Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe	207
Kurze Auszüge. Baumechanik	218
Elektrotechnik	220
Kleine Mitteilungen. Nemény i: Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes	222
Buchbesprechungen. Geiringer: Die Gedankenwelt der Mathematik — Scheffers: Lehrbuch der darstellenden Geometrie — Fischer: Einführung in die darstellende Geometrie	224
Nachrichten	226
Zuschriften an den Herausgeber	227

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage.

Von **K. WIEGHARDT** in Dresden.

Für den Balken auf nachgiebiger Unterlage — das wichtigste Beispiel ist die Eisenbahnschwelle — hat H. Zimmermann, indem er entsprechende Ansätze verschiedener Vorgänger berichtigte, ergänzte und zusammenfaßte, eine Theorie ausgearbeitet [1]), welche ziemlich rationell ist, keinen erheblichen mathematischen Apparat erfordert und sich demgemäß bei den Bauingenieuren großer Geltung erfreut. Von dieser soll ihr durch die vorliegende Abhandlung nichts genommen werden, obwohl die Abhandlung ihr Entstehen einem gewissen, ziemlich offenkundigen Mangel der Zimmermannschen Theorie verdankt. Denn so klar auch der Mangel zutage liegt, ebenso klar ist, daß seine Behebung sich praktisch kaum verlohnt. Die Unterlage nämlich, auf der unser Balken ruht, aus Erdreich, zusammengestopften Kieselsteinen u. dergl. bestehend, wird sich immer nur schwer und, namentlich was die zeitliche Konstanz ihrer Eigenschaften angeht, nur wenig zuverlässig definieren lassen. Jede Theorie wird hier also stark idealisieren müssen und so wird der Praktiker von vornherein überzeugt sein, daß die Ergebnisse einer Theorie, die prinzipiell besser ist als die Zimmermannsche, trotzdem mit der Wirklichkeit nicht besser übereinstimmen werden, daß er also von ihrer Anwendung nichts hätte als die Mühe, einen vermutlich größeren mathematischen Apparat beherrschen zu lernen. Der Theoretiker indessen, der um jeden Preis prinzipielle Aufklärung wünscht, wird sich durch die größere Kompliziertheit einer verbesserten Theorie nicht davon abschrecken lassen, sie aufzustellen und zu entwickeln. Und er wird schließlich auch bis zur Durchrechnung bestimmter Zahlenbeispiele schreiten — sogar dann, wenn die erforderlichen Zahlenrechnungen ungewöhnlich mühsam sein sollten, um nur den Vergleich mit der alten Theorie möglichst vielseitig durchführen zu können.

Im vorliegenden Falle liegen nun die Dinge im einzelnen so: Zwischen dem »Bettungsdruck« $p(x)$ und der »Einsenkung« $w(x)$ nimmt Zimmermann, darin ganz seinen Vorgängern folgend, den einfachen Zusammenhang

$$w(x) = \text{konst. } p(x)$$

[1]) H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888.

an, was, wie in **2** näher ausgeführt wird, prinzipiell mangelhaft ist. Vielmehr hat man einen Zusammenhang wie

$$w(x) = \text{konst.} \int_{-a}^{+a} p(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi$$

zu wählen und bekommt dadurch, da zwar K, aber nicht p von vornherein bekannt ist, mit sogenannten »Integralgleichungen erster Art« zu tun. Zwischen den Funktionen w und p besteht nun noch ein — gleich näher zu erörternder — zweiter Zusammenhang, durch den zusammen mit bezw. der einen oder andern der obigen Gleichungen beide Funktionen bestimmt sind. Indessen zeigt sich, daß ihre wirkliche Ermittlung bei allgemeiner Wahl des »Kerns« K auf ganz uferlose Rechnereien führt, wie die Auflösung unendlicher Gleichungsysteme, deren Koeffizienten selbst erst mühsam berechnet werden müssen u. dergl. Nur wenn man für K eine ganz bestimmte — und im übrigen zulässige, plausible — Wahl trifft, wird die ganze Theorie verhältnismäßig einfach. Dabei spielen die »Eigenfunktionen« und »Eigenwerte« dieses Kerns entscheidend mit.

Was den schon erwähnten zweiten Zusammenhang zwischen $p(x)$ und $w(x)$ angeht, so ist dieser bei Zimmermann einfach die in der technischen Literatur so genannte »Differentialgleichung der elastischen Linie«:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \text{konst.}\,[p_0(x) - p(x)],$$

wo $p_0(x)$ die Belastung des Balkens kennzeichnet. Mit dieser Gleichung, die im allgemeinen jedenfalls nur näherungsweise richtig ist, setzen wir uns in **4** auseinander, aber schon hier ist zu erwähnen, daß ihre Beibehaltung neben der obigen Integralgleichung nur dann möglich ist, wenn man sich zu der Annahme entschließt, der Bettungsdruck $p(x)$ arte an den Balkenenden in »konzentrierte Drucke« aus, weil man nämlich sonst mehr Randbedingungen zu befriedigen hätte, als man willkürliche Integrationskonstante zur Verfügung hat. Dieser Sachverhalt aber kann, wegen der nur bedingten Zuverlässigkeit der obigen Differentialgleichung, die Annahme einer so starken Singularität der Funktion $p(x)$, wie sie die Ausartung in konzentrierte Drucke bedeutet, nicht genügend rechtfertigen. Vielmehr ist eine befriedigende Aufklärung hier nur dadurch zu erwarten, daß diese Differentialgleichung zugunsten eines genaueren, aus der mathematischen Elastizitätstheorie zu entnehmenden Zusammenhanges aufgegeben wird. Mit Hilfe der bekannten Theorie der Airyschen Spannungsfunktion ergibt sich nun, daß man p_0, p, w durch gewisse unendliche Reihen Fourierscher Art darstellen kann in der Weise, daß, wenn — bei Beschränkung auf in x gerade Funktionen —

$$p_0(x) = \sum_\omega a_{0\omega} \cos\ \omega \pi x/a \quad \text{und} \quad p(x) = \sum_\omega a_\omega \cos\ \omega \pi x/a$$

gesetzt wird, alsdann

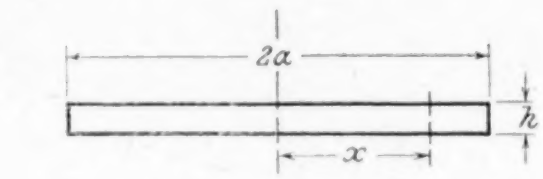
$$w(x) = \sum_\omega (\alpha_\omega a_{0\omega} + \beta_\omega a_\omega + \gamma_\omega) \cos\ \omega \pi x/a$$

ist, wo die α, β, γ nicht mehr von den a_0 und a abhängen.

Es stellt sich dann heraus, daß die stärkste Singularität, die auftreten kann, ein schwaches Unendlichwerden von $p(x)$ an den Balkenenden ist, daß aber konzentrierte Drucke nicht vorkommen, es sei denn, daß man den besonderen Fall des absolut starren Balkens behandelt, der ja aber nur als Grenzfall der Wirklichkeit in Betracht kommt. Die Beibehaltung der obigen Differentialgleichung in der neuen Theorie würde also bedeuten, daß man sich mit einer vergröberten Darstellung der Verhältnisse begnügt.

Endlich sei noch erwähnt, daß wir uns bei der schließlichen Durchführung der Theorie im einzelnen entschlossen haben, für die Belastung des Balkens eine ganz besondere Wahl zu treffen, nämlich $p_0(x) = \text{konst.}$ Eine prinzipielle Vereinfachung ist zwar dadurch nicht zu erzielen; aber einmal wird das Formelschreibwerk erheblich abgekürzt, sodann werden die Zahlenrechnungen verhältnismäßig einfach und endlich weichen gerade in diesem Falle die Ergebnisse der neuen Theorie von denen der alten besonders charakteristisch ab. Während Zimmermann findet, daß bei gleichmäßiger Belastung auch Bettungsdruck und Einsenkung konstant sind, finden wir, daß der Bettungsdruck von der Balkenmitte aus nach den Enden hin zunächst ab- und dann stark zunimmt, während die Einsenkung von der Mitte aus nach den Enden hin fortwährend abnimmt.

1. Die Zimmermannsche Theorie. Der Balken von der Länge $2a$, dem Elastizitätsmodul E und dem maßgebenden (konstanten) Querschnittsträgheitsmomente J ruhe, zunächst unbelastet, der ganzen Länge nach auf einer elastisch nachgiebigen Unterlage, Abb. 1. Belasten wir nun die obere Begrenzungsfläche des Balkens mit $p_0(x)$ pro Längeneinheit[1]) und die Kopfenden $x = \pm a$ mit beliebigen Biegungsmomenten $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_l$ und Schubkräften Q_r, Q_l — wir nennen sie im folgenden kurz die vorgeschriebenen Randmomente und Randkräfte — so wird sich, nach anfänglich eingetretenen Schwingungen, schließlich ein Gleichgewichtszustand herausbilden. Dabei wird der Balken eine Durchbiegung erfahren haben, die wir, nach unten positiv gerechnet, $w_d(x)$ nennen wollen, Abb. 2, während wir die Einsenkung der Unterlage an derselben Stelle mit $w_e(x)$ bezeichnen. Ueberall dort nun, wo sich auch jetzt noch Balken und Unterlage berühren, wo also $w_d(x) = w_e(x)$ ist, wird zwischen beiden ein gegenseitiger Druck pro Längeneinheit, der Bettungsdruck $p(x)$, übertragen werden, der natürlich dort, wo etwa keine gegenseitige Berührung mehr ist $(w_e(x) > w_d(x))$, verschwindet. Das Problem ist nun, bei beliebig vorgegebener Belastung die drei Funktionen $p(x)$, $w_d(x)$ und $w_e(x)$ zu finden. Dabei wird man zweckmäßig noch zwischen der »inneren« Einsenkung w_{ei} (für $|x| \leq a$) und der »äußeren« w_{ea} (für $|x| \geq a$) unterscheiden.



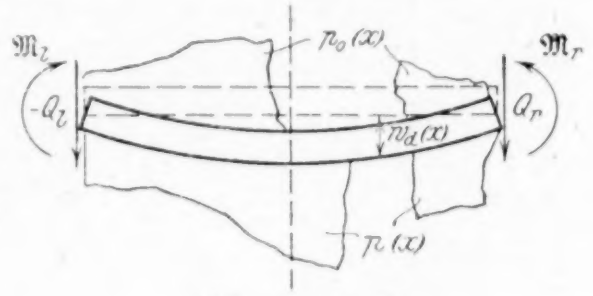


Abb. 1 und 2

Wir wollen nun der Einfachheit wegen von vornherein annehmen, daß in allen von uns später betrachteten Fällen eine Trennung des Balkens von der Unterlage tatsächlich nirgends stattfindet; wir brauchen dann zwischen der inneren Einsenkung und der Durchbiegung nicht mehr scharf zu unterscheiden, sparen demgemäß die Indizes e und d und handeln im folgenden nur noch von der inneren Einsenkung $w_i(x)$, der äußeren Einsenkung $w_a(x)$ und — gelegentlich — auch zusammenfassend von der Einsenkung $w(x)$ schlechthin. Das Problem ist nunmehr, bei gegebenen

$$p_0(x),\ \mathfrak{M}_r,\ \mathfrak{M}_l,\ Q_r,\ Q_l$$

die Funktionen $p(x)$ und $w(x)$ zu ermitteln.

Die beiden Beziehungen, die man offenbar hierzu nötig hat, werden die physikalische Natur bezw. des Balkens und der Unterlage zum Ausdruck bringen. Was zunächst den Balken angeht, so übernimmt Zimmermann den in der technischen Literatur allgemein üblichen Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Biegungsmoment $\mathfrak{M}(x)$ eines elastisch-isotropen, nur wenig gekrümmten Stabes, nämlich

$$EJ\frac{d^2 w_i}{dx^2} = -\mathfrak{M}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

aus dem sich dann, wenn man die bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$Q(x) = \frac{d\mathfrak{M}}{dx},\quad p(x) - p_0(x) = \frac{dQ}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hinzunimmt, die sogenannte »Differentialgleichung der elastischen Linie«

$$EJ\frac{d^4 w_i}{dx^4} = p_0(x) - p(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ergibt nebst der Beziehung:

$$Q(x) = -EJ\frac{d^3 w_i}{dx^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

was aber die Unterlage angeht, so nimmt er an, daß an jeder Stelle x Bettungsdruck und Einsenkung einander proportional sind:

$$w_i(x) = \frac{p(x)}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

---

[1]) In praktischen Fällen, z. B. bei der Eisenbahnschwelle, denkt man sich die Belastung gern als aus einer endlichen Anzahl endlicher Kräfte bestehend, die an einzelnen Stellen des Balkens angreifen. Es wird dann an diesen Stellen die »Belastung pro Längeneinheit« unendlich groß und im übrigen Null, d. h. in diesem Falle ist $p_0(x)$ kein geeignetes Darstellungsmittel. In der vorliegenden Abhandlung wird an Belastungen gedacht, bei denen $p_0(x)$ regulär ist.

Die Konstante C, die »Bettungsziffer«, charakterisiert dabei die Unterlage, insofern als ein großer Wert von C eine harte, ein kleiner eine weiche Unterlage bedeutet.

Durch Kombination der Ansätze (3) und (5) bekommt man dann für w_i oder p eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} + \frac{1}{CEJ} w_i(x) = \frac{p_0(x)}{EJ} \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 p}{dx^4} + \frac{1}{CEJ} p(x) = \frac{p_0(x)}{CEJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ihr allgemeines Integral enthält vier willkürliche Konstante, die sich eindeutig aus den aus (2) und (4) entspringenden 4 Randbedingungen:

$$EJ\left(\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)_{x=a} = -\mathfrak{M}_r,\ EJ\left(\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)_{x=-a} = -\mathfrak{M}_l,\ EJ\left(\frac{d^3 w_i}{dx^3}\right)_{x=a} = -Q_r,\ EJ\left(\frac{d^3 w_i}{dx^3}\right)_{x=-a} = -Q_l\ . \quad (7)$$

ergeben. Die äußere Einsenkung ist immer Null:

$$w_a(x) = 0.$$

Sind z. B. die Randkräfte und -momente Null und ist im übrigen der Balken gleichmäßig belastet: $p_0(x) = \text{konst.} = p_0$, so bekommt man einfach

$$w_i(x) = \frac{p_0}{C} = \text{konst.}, \quad p(x) = p_0 = \text{konst.}, \quad w_a(x) = 0$$

als Lösung, vgl. Abb. 3.

2. Kritik des Ansatzes (5). Dieser Ansatz ist prinzipiell mangelhaft nicht etwa, weil er zwischen Bettungsdruck und Einsenkung Proportionalität festsetzt, sondern deshalb, weil er die Annahme in sich schließt, daß ein irgendwo auf die Unterlage ausgeübter Druck nur an dieser Stelle eine Einsenkung erzeugt, während doch in Wirklichkeit nur ein mehr oder weniger allmähliches Abnehmen der Einsenkung von der gedrückten Stelle aus in Betracht kommen kann[1]), Abb. 4. Umgekehrt kann dann die Einsenkung an der Stelle x nicht nur vom Bettungsdruck an dieser Stelle abhängen, vielmehr wird sie von allen Bettungsdrucken abhängen, die überhaupt vorhanden sind. Wir haben also den Ansatz (5)

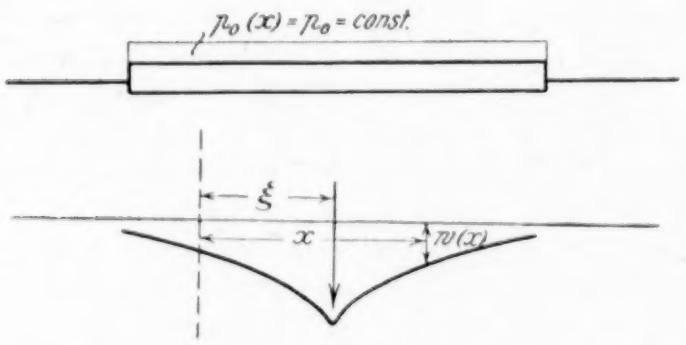


Abb. 3 und 4

durch den folgenden zu ersetzen:

$$w(x) = c\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wo K jedenfalls eine solche Funktion der gegenseitigen Entfernung der Stellen x und ξ, nämlich $r = |x-\xi|$, ist, die ihren größten Wert für $x = \xi$ hat und für wachsendes r entweder schon im Endlichen, jedenfalls aber im Unendlichen verschwindet, Abb. 4. Die Konstante c ist ein Analogon zu der Zimmermannschen Bettungsziffer C, nur bedeutet ein großes c eine weiche, ein kleines eine harte Unterlage.

Wie soll man nun die Funktion $K(r)$ wählen? Wäre die Unterlage etwa der elastisch-isotrope Halbraum, so wäre diese Wahl überhaupt nicht frei, sondern K durch die Elastizitätslehre völlig bestimmbar[2]), aber diese Annahme ist natürlich zu gewagt.

---

[1]) Zimmermanns (a. a. O., S. 1 Fußnote) Meinung, die Gleichung (5) sei bei kleinen Formänderungen immer zulässig, ist also nur insofern zutreffend, als sie die Annahme der Proportionalität zwischen Bettungsdruck und Einsenkung in sich schließt. Diese steht aber auch in unserm Ansatze (8): eine Ver-n-fachung von $p(\xi)$ hat auch eine Ver-n-fachung von $w(x)$ zur Folge.

[2]) Unterliegt ein Stück der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes der Flächendruckverteilung $p'(\xi\eta)$, so erfährt dadurch der Punkt xy der Oberfläche bekanntlich (siehe etwa A. E. H. Lowe, Lehrbuch der Elastizität; deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 226) die Einsenkung:

$$w(xy) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E}\iint \frac{p'(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

wo m in üblicher Weise den reziproken Wert der Poissonschen Konstanten bedeutet (m = sog. »Verhältnis von Längenausdehnung zur Querkontraktion«). Ist das Stück nun ein Rechteck, dessen zur Y-Achse parallele Seite 2ε klein ist im Vergleich zu der zur X-Achse parallelen Seite $2a$, so wird es näherungsweise erlaubt sein, die Veränderlichkeit von p' mit η zu vernachlässigen. Man kann dann die

Eher könnte man daran denken, $K(r)$ direkt aus Versuchen zu ermitteln. Es ist interessant, daß hier tatsächlich einige vorläufige Zahlen vorliegen als Ergebnis eines Versuches, den A. Föppl im Hofe seines Laboratoriums angestellt hat[1]). Aus ihnen geht jedenfalls hervor, daß $K(r)$ mit wachsendem r viel stärker abnimmt, als es beim elastisch-isotropen Halbraum der Fall wäre. Ja man könnte von hier aus auf den Gedanken kommen, $K(r)$ als Exponentialfunktion:

$$K(|x-\xi|) = e^{-k|x-\xi|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

anzusetzen. Indessen soll, wenn wir dies nachher wirklich tun, nicht verschwiegen werden, daß der eigentliche Grund für diese Wahl doch ein anderer ist: Nur bei dieser Wahl nämlich ist die neue Theorie einigermaßen bequem zu entwickeln und bis zur praktischen Möglichkeit, Zahlenbeispiele auszurechnen, durchzuführen.

Nachdem wir so die eine Grundgleichung der alten Theorie (5) aufgegeben haben, wollen wir die andere, die Differentialgleichung der elastischen Linie, einstweilen noch beizubehalten versuchen (**4**). Dabei werden wir freilich auf Schwierigkeiten stoßen und deshalb weiterhin (**5**) auch diese Gleichung noch fallen lassen. Zunächst aber wollen wir zwei Grenzfälle untersuchen, bei denen es ganz einerlei ist, ob wir dies tun oder nicht.

3. Der absolut biegsame und der absolut starre Balken. Besonders einfach gestaltet sich die Ermittlung von Bettungsdruck und Einsenkung im Falle des absolut biegsamen Balkens ($E = 0$). Hier wird, auf Grund der Gl. (3), ebenso wie bei Benutzung irgend eines feineren Ansatzes:

$$p_0(x) = p(x)$$

(die Randkräfte und Randmomente können natürlich nur zu Null vorgeschrieben werden). Die Ermittlung der Einsenkung verlangt dann nur noch die Ausführung der Quadratur:

$$w(x) = c \int_{-a}^{+a} p_0(\xi)\, K(|x-\xi|)\, d\xi.$$

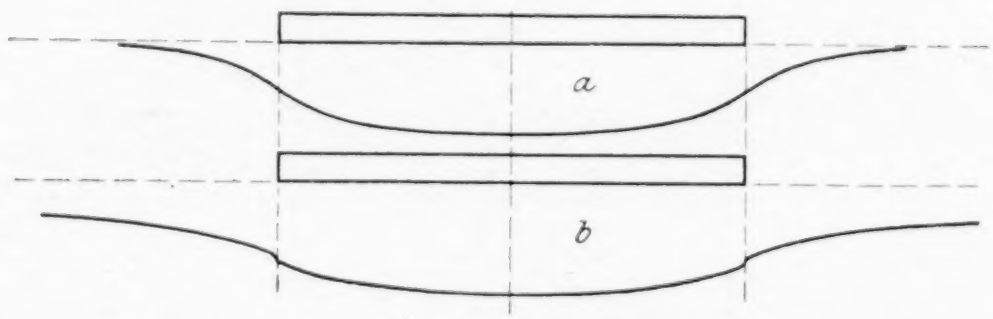


Abb. 5

Die Abb. 5 und folgende Formeln schildern den Verlauf von $w(x)$ bei verschiedener Wahl der Funktion K für den Fall der gleichmäßigen Belastung: $p_0(x) = \text{konst.} = p_0$.

a) Es ist für $K = e^{-k|x-\xi|}$:

$$w_i(x) = \frac{c p_0}{k}\left(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a-x)}\right), \qquad w_a(x) = \frac{c p_0}{k}\left(e^{ka} - e^{-ka}\right) e^{-k|x|} \qquad (10);$$

Integration nach η ausführen und bekommt bei gleichzeitigem Uebergang vom Flächendruck p' zum Druck pro Längeneinheit $p = 2\varepsilon p'$:

$$w(xy) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-a}^{+a} p(\xi) \log \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\varepsilon)^2} - (y-\varepsilon)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\varepsilon)^2} - (y+\varepsilon)}\, d\xi.$$

Unter der Einsenkung des Balkens an der Stelle x wäre dann der Mittelwert

$$w(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w(xy)\, dy$$

zu verstehen. Nimmt man statt dessen einfacher den Wert von $w(xy)$ für $y = 0$, so bekommt man:

$$w(x) = \frac{m^2-1}{m^2 \pi E}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-a}^{+a} p(\xi) \log\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}\right) d\xi.$$

[1]) A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. III, Festigkeitslehre, Leipzig und Berlin 1909. S. 228 ff.

b) es ist für $K = \log\left(1 + \frac{k}{|x-\xi|}\right)$:

$$w_i(x) = cp_0\,[(k+a+x)\log(k+a+x) + (k+a-x)\log(k+a-x) - (a+x)\log(a+x) - (a-x)\log(a-x) - 2k\log k]$$

$$w_a(x) = cp_0\,[(k+x+a)\log(k+x+a) - (k+x-a)\log(k+x-a) - (x+a)\log(x+a) + (x-a)\log(x-a)] \quad \text{für } x \geq a$$

Während in der alten Theorie die Einsenkung an den Balkenenden sich sprungweise ändert (vergl. Abb. 3), ist sie in der neuen durchaus stetig. Im Falle a) weist sie an den Balkenenden überhaupt nichts Singuläres auf, im Falle b) hat sie dort eine vertikale Berührende, was damit zusammenhängt, daß im einen Falle $K(o)$ endlich, im andern unendlich groß ist.

Im entgegengesetzten Falle des absolut starren Balkens ($E = \infty$) handelt es sich dagegen um ein schwieriges Problem. Zwar ist, eben wegen der Starrheit des Balkens, die innere Einsenkung einfach eine lineare Funktion, ja, wenn wir uns auf symmetrische Belastung beschränken, sogar eine Konstante:

$$w_i(x) = \text{konst.} = w_0,$$

aber jetzt hat man die unbekannte Funktion $p(x)$ aus der Gl. (8) bei gegebener Funktion $w_i(x) = w_0$ zu ermitteln, man hat also eine Integralgleichung erster Art aufzulösen, was keineswegs leicht ist und jedenfalls nur bei besonderer Wahl von K, des »Kerns« der Integralgleichung, praktisch möglich sein wird. Vor allem ist wichtig zu wissen, daß die Integralgleichung überhaupt nicht immer dann, wenn $w_i(x)$ eine reguläre, singularitätenfreie Funktion ist, eine ebensolche Funktion $p(x)$ als Lösung besitzt! So muß z. B., wenn wir als Kern unsere Exponentialfunktion (9) wählen, $w_i(x)$ ganz bestimmten Randbedingungen genügen (siehe **4.**), wenn $p(x)$ regulär sein soll. Diese Randbedingungen befriedigt nun die Funktion $w_i(x) = \text{konst.}$ nicht und so muß unser $p(x)$ Singularitäten enthalten. Welcher Art diese sind und wie überhaupt $p(x)$ herauskommt, zeigt folgende Betrachtung:

Aus der Gl. (11) folgt zunächst, daß p nicht etwa konstant sein kann; denn wäre etwa $p(x) = \text{konst.} = p_1$, so wäre nach dieser Gleichung die innere Einsenkung:

$$w_i'(x) = \frac{cp_1}{k}\left(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a-x)}\right),$$

also nicht konstant. Nun sind aber die die Konstanz von w_i verhindernden Glieder Exponentionalfunktionen und lassen sich deshalb durch zwei an den Balkenenden wirkende konzentrierte Drucke $D = \frac{p_1}{k}$ wegschaffen, denn diesen beiden Drucken für sich genommen würde ja die innere Einsenkung

$$w_i''(x) = \frac{cp_1}{k}\left(e^{-k(a+x)} + e^{-k(a-x)}\right)$$

entsprechen, so daß also bei der Ueberlagerung der gleichmäßigen Druckverteilung p_1 mit diesen konzentrierten Drucken tatsächlich die konstante innere Einsenkung

$$w_i(x) = \frac{2cp_1}{k}$$

herauskommt. Berücksichtigt man noch, daß wegen des Balkengleichgewichtes

$$2ap_1 + 2D = P + 2Q$$

sein muß, wo abkürzend

$$\int_{+a}^{+a} p_0(x)\,dx = P$$

gesetzt ist, während Q die am rechten Balkenende vorgeschriebene Schubkraft bedeutet (am linken ist sie wegen der Symmetrie der Belastung $-Q$), so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Wenn ein in beschriebener Weise mit P und $2Q$ belasteter **starrer** Balken in die durch

$$K = e^{-k|x-\xi|}$$

charakterisierte elastische Unterlage eingedrückt wird, so setzt sich der Bettungsdruck zusammen aus der gleichmäßigen Druckverteilung

$$p_1(x) = \frac{k(P+2Q)}{2(1+ak)}$$

und den beiden gleichen konzentrierten Drucken D an den beiden Balkenenden:

$$D = \frac{P + 2Q}{2(1 + ak)};$$

die Einsenkung wird durch die Ausdrücke:

$$w_i(x) = \text{konst.} = \frac{c(P + 2Q)}{1 + ak}, \quad w_a(x) = \frac{c(P + 2Q)}{1 + ak} e^{-k(x-a)} \text{ für } x \geq a$$

dargestellt. Zwei an den Balkenenden etwa noch vorgeschriebene (wegen der Symmetrie gleiche) Biegungsmomente sind ohne jeden Einfluß auf das Ergebnis, wie von vornherein plausibel ist. Die Einsenkungskurve ist zwar überall stetig, hat aber an den Balkenenden Knicke, Abb. 6.

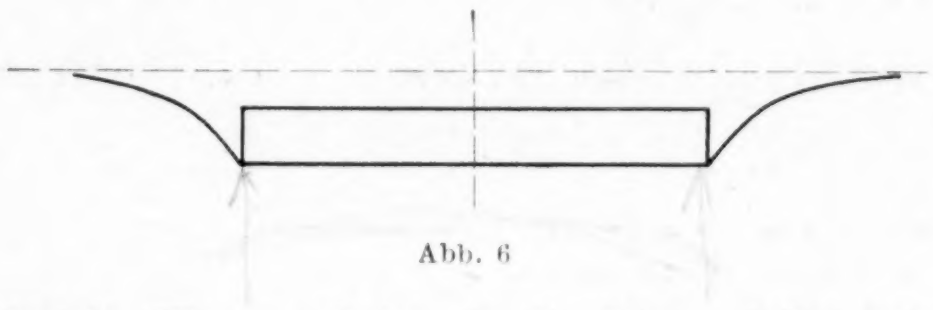


Abb. 6

Es wäre interessant, wenn man unsere Aufgabe auch für den elastisch-isotropen Halbraum als Unterlage lösen könnte, also unter Benutzung des Kerns in der Fußnote 2 (S. 168, letzte Gleichung). Wie es scheint, ist die Lösung leider unbekannt. Dagegen kennt man hier die Lösung für den Fall, daß es sich nicht um einen Balken handelt, sondern um einen Kreiszylinder, Abb. 7. Auch hier werden natürlich alle Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen, dem Horizontalabstande r von der Drehachse des Zylinders. Ist a der Halbmesser, m der reziproke Wert der sogenannten Poissonschen Konstanten für das Zylindermaterial (m = »Längsdehnung : Querkontraktion«), so ist nach H. Weber[1]):

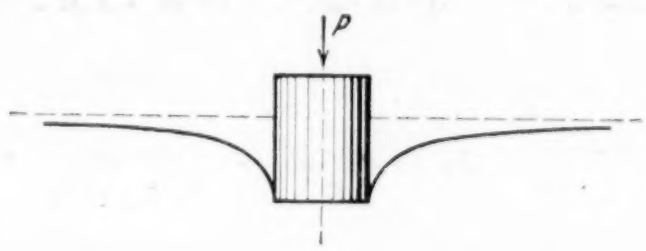


Abb. 7

$$p(r) = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad w_i(r) = \text{konst.} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{2aE}, \quad w_a(r) = \frac{m^2 - 1}{m^2} \frac{P}{2aE} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}.$$

Auch hier ist also der Bettungsdruck am Rande singulär, insofern er dort unendlich groß wird, aber das bedeutet keinen konzentrierten Druck, denn die Funktion

$$f(r) = \int_0^r \varrho\, p(\varrho)\, d\varrho$$

ist auch an der Stelle $r = a$ stetig, während bei unserm Balken die Funktion

$$f(x) = \int_0^x p(z)\, dz$$

bei $x = a$ plötzlich den endlichen Zuwachs D erfährt.

4. Der elastische Balken; vorläufige Beibehaltung der Differentialgleichung (3). Beim elastischen Balken wird das mathematische Problem noch verwickelter; es handelt sich jetzt darum, $w_i(x)$ und $p(x)$ aus (3) und (8) zu ermitteln. Der unmittelbare Versuch, zwischen diesen Gleichungen eine der beiden gesuchten Funktionen zu eliminieren, etwa $p(x)$, führt zu einer »Integrodifferentialgleichung«, mit der nichts rechtes anzufangen ist. Besser wird es sein, die Integralgleichung (8) durch eine Differentialgleichung zwischen $p(x)$ und $w_i(x)$ — nebst gewissen Randbedingungen für $w_i(x)$ — zu ersetzen, was nach D. Hilbert[2]) jedenfalls dann möglich ist, wenn der Kern der Integralgleichung sich als Greensche Funktion eines sich selbst adjungierten Differentialausdrucks zweiter Ordnung auffassen läßt. Um aber hier die Bekanntschaft mit Hilberts Theorie der linearen Integralgleichungen nicht voraussetzen zu müssen, wollen

---

[1]) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik (nach Riemanns Vorlesungen), Braunschweig 1901, Bd. 2, S. 196 bis 202.

[2]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1912, S. 39 ff.

wir zunächst diese Ergebnisse ableiten, ohne diese Theorie zu benutzen, was ganz leicht ist, wenn wir als Kern wieder die Exponentialfunktion (9) wählen.

Nehmen wir an, $p(x)$ arte nirgends in konzentrierte Drucke aus, so bekommen wir durch direkte Differentiation von $w(x)$ folgende Formeln:

$$\frac{dw_i}{dx} = -ck\int_{-a}^{x} p(\xi)\, e^{-k(x-\xi)}\, d\xi + ck\int_{x}^{a} p(\xi)\, e^{-k(\xi-x)}\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = ck^2\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}\, d\xi - 2ck\, p(x)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = -ck\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k(x-\xi)}\, d\xi \text{ für } x \geqq a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = +ck\int_{-a}^{+a} p(\xi)\, e^{-k(\xi-x)}\, d\xi \text{ für } x \leqq -a.$$

Die Elimination der Integrale aus diesen Gleichungen führt zu folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} - k^2 w_i(x) = -2ck\, p(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\frac{dw_a}{dx} = -k\, w_a(x) \text{ für } x \geqq a \quad \text{und} \quad \frac{dw_a}{dx} = k\, w_a(x) \text{ für } x \leqq -a.$$

Die äußeren Einsenkungskurven sind demnach immer Zweige von Exponentialkurven:

$$w_a(x) = \text{konst.}\, e^{-k|x|}.$$

Während nun die Einsenkungskurve selbst an den Balkenenden sich immer stetig verhält, gilt dasselbe für ihren ersten Differentialquotienten nur dann, wenn $p(x)$ an den Enden nicht in konzentrierte Drucke ausartet, denn aus (11) und (12) ergibt sich die Stetigkeit solange, als

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-a}^{-(a-\varepsilon)} p(z)\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{a} p(z)\, dz = 0$$

ist, oder, was dasselbe ist, solange sich die Funktion

$$f(x) = \int^{x} p(z)\, dz$$

auch für $x = \pm a$ stetig verhält. Dazu ist, wie schon früher bemerkt wurde (3), keineswegs nötig, daß $p(\pm a)$ endlich bleibt.

Solange wir also konzentrierte Drucke ausschließen, bestehen für die innere Einsenkung die Randbedingungen:

$$\left(\frac{dw_i(x)}{dx}\right)_{x=a} = -k\, w_i(a), \quad \left(\frac{dw_i(x)}{dx}\right)_{x=-a} = k\, w_i(-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Um noch zu erkennen, daß sich aus der Integralgleichung (8) außer der Differentialgleichung (13) und den Randbedingungen (14) nicht noch weitere Bedingungen für $w_i(x)$ und $p(x)$ ergeben, setzen wir $p(x)$, wie es aus (13) folgt, in die Integralgleichung ein und eliminieren daraus durch wiederholte partielle Integration die Differentialquotienten von $w_i(x)$. Dann bekommen wir:

$$w_i(x) = w_i(x) + \frac{e^{-k(a+x)}}{2k}\left[\left(\frac{dw_i}{dx}\right)_{x=-a} - k\, w_i(-a)\right] - \frac{e^{-k(a-x)}}{2k}\left[\left(\frac{dw_i}{dx}\right)_{x=a} + k\, w_i(a)\right],$$

also eine Identität, falls die Randbedingungen erfüllt sind. Es ist also tatsächlich das Bestehen der Integralgleichung (8) äquivalent mit der Differentialgleichung (13) und den Randbedingungen (14), falls $p(x)$ nirgends in konzentrierte Drucke ausartet [1]).

---

[1]) Nach Hilbert (a. a. O., S. 39 bis 47) hätte sich die Untersuchung so gestaltet: Wir betrachten den sich selbst adjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung:

$$L(u) = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{k}\frac{d^2 u}{dx^2} - k\, u(x)\right).$$

Nunmehr können wir leicht aus den Differentialgleichungen (3) und (13) $p(x)$ eliminieren und behalten dann für $w_i(x)$ die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung übrig:

$$E J \frac{d^4 w_i}{dx^4} - \frac{1}{2kc} \frac{d^2 w_i}{dx^2} + \frac{k}{2c} w_i(x) = p_0(x).$$

Ihre allgemeine Lösung enthält vier willkürliche Konstante, denen aber sechs Randbedingungen gegenüberstehen, nämlich außer den soeben abgeleiteten (14) noch jene vier, die den vorgeschriebenen Randkräften und -momenten entsprechen (7).

Wie erklärt sich diese Unstimmigkeit und wie ist sie zu beheben?

Wir haben gesehen, daß bei der Ableitung der obigen Randbedingungen die Annahme wesentlich war, der Bettungsdruck arte an den Balkenenden nicht in konzentrierte Drucke aus. Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Unstimmigkeit sofort verschwinden wird, wenn wir annehmen, die reguläre Bettungsdruckverteilung werde an den Balkenenden noch durch zwei noch näher zu bestimmende konzentrierte Drucke D_1 und D_2 überlagert. In der Tat läßt sich hierdurch die Schwierigkeit beheben, wie sich leicht genauer zeigen ließe. Indessen bedeutet das keine wirkliche Aufklärung. Obwohl wir nämlich nach den Ergebnissen in **3** annehmen müssen, daß beim starren Balken diese konzentrierten Drucke wirklich auftreten, ist es doch unwahrscheinlich, daß dasselbe für den elastischen Balken gelten solle, ist es doch in der Mechanik nichts Ungewöhnliches, daß die Einführung des starren Körpers absurde Ergebnisse zeitigt, die sofort verschwinden, wenn man ihn durch einen elastischen Körper ersetzt. Jedenfalls ist von vornherein die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß unsere ganze Schwierigkeit ihren Grund in der nur bedingten Zuverlässigkeit der Differentialgleichung (3) hat. Es ist ja bekannt, daß man mit Hilfe der mathematischen Elastizitätstheorie leicht Spannungs- und Verrückungssysteme in Balken angeben kann, bei denen die der Gleichung (3) zugrunde liegende Beziehung (1) gar nicht gilt. Es ist dies auch nach der Art, wie diese Beziehung gewonnen wird, gar nicht merkwürdig; insbesondere wird man immer dann, wenn der Balken der ganzen Länge nach von Drucken p_0 und p ergriffen ist, mit der Möglichkeit rechnen müssen, daß die Sache nicht stimmt[1]).

Setzen wir nun:

$$u(x\,\xi) = \frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|},$$

so hat dieser Ausdruck, als Funktion von x betrachtet, folgende Eigenschaften:

1. $u(x)$ genügt im Intervalle von $-a$ bis $+a$ für alle $x \gtrless \xi$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$,
2. $u(x)$ ist im ganzen Intervall stetig, auch für $x = \xi$,
3. $\frac{du}{dx}$ ist stetig mit Ausnahme der Stelle $x = \xi$, wo es plötzlich um den Betrag -1 springt

(wenn man im Sinne wachsender x die Stelle passiert).

Somit ist $u(x\,\xi)$ eine Grundlösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in dem genannten Intervall.

Da aber weiter, wie man leicht sieht, $u(x)$ auch die Randbedingungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = -k\,u(a) \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=-a} = k\,u(-a)$$

befriedigt, ist $u(x\,\xi) = g(x\,\xi)$, d. h. eine zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$ und somit ist endlich

$$G(x\,\xi) = 2\,c\,k\,g(x\,\xi) = c\,e^{-k|x-\xi|}$$

die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdrucks $L(u)$. Daraus folgt aber, daß, unter $w_i(x)$ eine im ganzen Intervall zweimal stetig differenzierbare und den obigen Randbedingungen genügende Funktion verstanden, die einander äquivalenten Gleichungen bestehen:

$$w_i(x) = \int_{-a}^{+a} G(x\,\xi)\,p(\xi)\,d\xi \quad \text{und} \quad p(x) = -L[w_i(x)]$$

also:

$$w_i(x) = c\int_{-a}^{+a} p(\xi)\,e^{-k|x-\xi|}\,d\xi \quad \text{und} \quad p(x) = \frac{1}{2c}\left(k\,w_i(x) - \frac{1}{k}\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right).$$

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 415 bis 417).

Somit kann eine wirkliche Aufklärung nur dadurch erreicht werden, daß wir die Gleichung (3) fallen lassen und durch einen zuverlässigen Ansatz der mathematischen Elastizitätstheorie ersetzen. Dabei kommt, wie schon in der Einleitung erwähnt, heraus, daß beim elastischen Balken die konzentrierten Drucke nicht vorhanden sind. Deshalb verzichte ich hier auch darauf, die Möglichkeit, die Gleichung (3) durch Einführung obiger Drucke D_1 und D_2 formal zu retten, genauer auseinanderzusetzen, begnüge mich vielmehr damit, ein von mir durchgerechnetes Zahlenbeispiel mit dem Ergebnis der in den folgenden Nummern durchgeführten feineren Untersuchung für dasselbe Zahlenbeispiel zu vergleichen (**8**).

5. Der elastische Balken; Ersatz der Differentialgleichung (3) durch einen Ansatz der mathematischen Elastizitätstheorie. a) Vorbemerkung. Um im folgenden kein unerträglich weitläufiges Formelschreibwerk zu bekommen, vermeiden wir einmal jede unnötige Allgemeinheit der Betrachtung (der Leser wird hier, wenn er wünscht, leicht zur Ergänzung imstande sein) und unterdrücken möglichst viel bloße Zwischenrechnung.

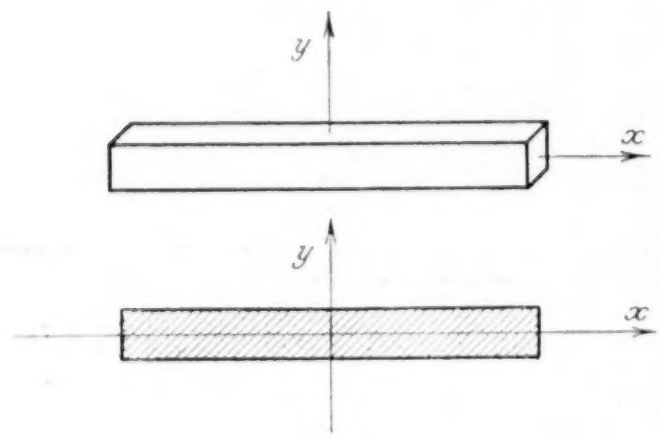


Abb. 8

b) Allgemeines Programm. Unser Balken sei ein Parallelepiped von der Länge $2a$, der Höhe $h = 2b$ und der Dicke δ. In seiner zu δ senkrechten Mittelebene orientieren wir uns durch das Koordinatensystem der Abb. 8. Alle am Balken angreifenden Kräfte mögen zu dieser Ebene symmetrisch liegen. Wir können dann die bekannte Theorie der Airyschen Spannungsfunktion[1]) anwenden: Sei für unser schraffiertes Rechteck $F(x\,y)$ irgend eine biharmonische Funktion, d. h. eine Funktion, die im ganzen Rechteck der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

genügt. Dann definieren die drei zweiten Differentialquotienten von F in bekannter Weise einen in unserm Balken möglichen Spannungszustand (die Spannungen sind hier pro Flächeneinheit gemeint, nicht wie p und p_0 pro Längeneinheit):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad (15),$$

wobei der Sinn (das Vorzeichen) aus der Abb. 9 hervorgeht. Auch an den Rändern $x = \pm a$ und $y = \pm b$ unseres Rechteckes werden diese Formeln gelten, aber unter »Randspannungen« mögen nicht alle drei Spannungskomponenten (15) verstanden sein, die wir an einem Randpunkte haben, sondern nur jene zwei, die ihren Sitz in der Randfläche haben, also für $x = \pm a$ die Komponenten σ_x und τ_{xy}, für $y = \pm b$ dagegen σ_y und τ_{xy}; wir bezeichnen sie kurz als »die Randspannungen σ_n, τ_n«. Sind nun ringsum die Randspannungen beliebig vorgeschrieben (aber natürlich so, daß sie zusammen ein Gleichgewichtssystem von Kräften ergeben), so gibt es eine, wesentlich eindeutig bestimmte, im Rechteck biharmonische Funktion $F(x\,y)$, welche ringsum die vorgeschriebenen Randspannungen liefert, die »zu diesen Randspannungen gehörige Airysche Spannungsfunktion unseres Rechteckes«. Sie liefert durch (15) an allen Stellen die zugehörigen Spannungen. Auch die Verrückungskomponenten $u(x\,y)$, $v(x\,y)$ im Sinne der beiden Koordinatenachsen lassen sich leicht gewinnen, nämlich durch Integration der Gleichungen:

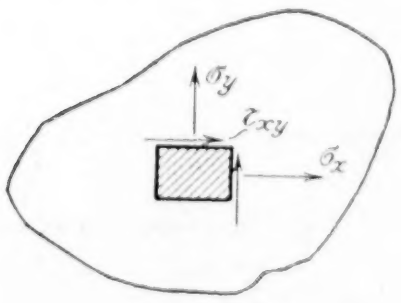


Abb. 9

$$\sigma_x = \frac{m\,E}{m^2-1}\left(m\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad \sigma_y = \frac{m\,E}{m^2-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + m\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad \tau_{xy} = \frac{m\,E}{2\,(m+1)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (16),$$

natürlich nur bis auf solche Zusatzglieder, die einer verzerrungsfreien Verrückung des ganzen Balkens entsprechen.

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 246.

Beiläufig wollen wir noch hinschreiben, wie sich die im einzelnen Balkenquerschnitt resultierenden Kräfte und Momente durch die Spannungen daselbst ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Normalkraft } N(x) = \delta\int_{-b}^{+b}\sigma_x\,dy, \qquad \text{Schubkraft } Q(x) = -\delta\int_{-b}^{+b}\tau_{xy}\,dy \\ &\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}(x) = -\delta\int_{-b}^{+b}\sigma_x y\,dy \end{aligned}\right\}. \quad (17).$$

Angenommen nun, wir könnten für das Rechteck die beschriebene Randwertaufgabe ganz allgemein lösen, dann könnten wir natürlich insbesondere auch herausbekommen, welcher Zusammenhang bei unserm beliebig belasteten Balken:

$$p_0(x),\ \mathfrak{M}_r,\ \mathfrak{M}_l,\ Q_r,\ Q_l$$

zwischen der Belastung, dem Bettungsdruck $p(x)$ und der Durchbiegung $w_i(x)$ besteht. Wir hätten nur längs $y = b$ die Spannungskomponenten $\sigma_y = -p_0(x)/\delta$, $\tau_{xy} = 0$, längs $y = -b$: $\sigma_y = -p(x)/\delta$, $\tau_{xy} = 0$ vorzuschreiben und längs $x = \pm a$ irgend solche σ_x und τ_{xy} — hier bleibt eine gewisse Willkür —, daß gemäß (17) die vorgeschriebenen Biegungsmomente und Schubkräfte (nebst der Normalkraft Null) herauskommen. Man würde dann nach (16) die Verrückungen ermitteln, in denen die Durchbiegung unseres Balkens als

$$w_i(x) = -v(x,y)_{y=-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

enthalten wäre. Und dieser Zusammenhang ist es dann gerade, der uns die Differentialgleichung (3) ersetzen soll.

Daß dieser Zusammenhang wegen der soeben erwähnten Willkür bei der Wahl der Randspannungen für $x = \pm a$ nicht eindeutig bestimmt ist, wird später noch eine gewisse Rolle spielen (**6**). Schon jetzt aber wird man vermuten, daß zufolge des bekannten St. Venantschen Prinzips[1]) diese Willkür die Ergebnisse nur in nächster Nähe dieser Ränder wird beeinflussen können, falls nur der Balken viel mehr lang als hoch und dick ist. Auch diese Vermutung wird in **8** bestätigt.

c) Wirkliche Durchführung. Leider ist nun die allgemeine Airysche Spannungsfunktion des Rechteckes nur in Form unendlicher Reihenentwicklungen bekannt, deren Koeffizienten durch die vorgeschriebenen Randspannungen erst in sehr indirekter Weise, nämlich als Wurzeln unendlicher linearer Gleichungssysteme, bestimmt sind[2]). Indessen zeigt sich, daß wir die allgemeine Spannungsfunktion nicht brauchen, wenn wir nur darauf verzichten, längs $x = \pm a$ die Randspannungen ganz beliebig vorschreiben zu können. Und in der Tat könnten wir ja hier zur Not sogar auf jede Willkür verzichten, sofern es nur gelingt, noch beliebige Randkräfte und -momente Q_r, Q_l, $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_l$, $N_r = 0$, $N_l = 0$ herauszubekommen. Eine so weitgehende Einschränkung ist aber schließlich doch wieder nicht erwünscht und auch nicht nötig; es bietet sich uns folgender Mittelweg: Wir benutzen als Spannungsfunktion die Ueberlagerung von vier, gleich zu schildernden biharmonischen Funktionen $F^{(1)}$ bis $F^{(4)}$:

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}.$$

Um das Schreibwerk abzukürzen, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß alle Randspannungen symmetrisch verteilt sind zum Mittelquerschnitt des Balkens ($x = 0$), dann kommen nur solche Spannungsfunktionen in Betracht, die in x gerade sind.

Wir beginnen mit $F^{(1)}$, das wir die »Hauptfunktion« nennen wollen im Gegensatz zu den drei übrigen, die »Zusatzfunktionen« heißen mögen.

Ersichtlich ist die Funktion:

$$F^{(1)}(x\,y) = \sum_{\omega}\left(A_\omega \mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + B_\omega \mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_\omega \frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega \frac{\omega\pi y}{a}\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\right)\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

wo der Reihe nach

$$\omega = \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots\ \omega_n$$

ist, — zunächst bei endlicher Anzahl der Summanden — eine in der ganzen Ebene biharmonische Funktion, wobei noch die $A\,B\,C\,D$, aber auch die ω ganz beliebige Konstante sein können.

---

[1]) Love-Timpe a. a. O., S. 155.

[2]) E. Mathieu, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1890, 2. partie, S. 140 ff. oder G. Lauricella in Acta mathematica, 32 1909, S. 201.

In ähnlicher Form erscheinen dann gemäß (15) und (16) auch die Spannungs- und Verrückungskomponenten, wobei nur außer den cos auch die sin vorkommen:

$$\sigma_x = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[(A_\omega + 2\,C_\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + (B_\omega + 2\,D_\omega)\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$\sigma_y = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[-A_\omega\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} - B_\omega\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$\tau_{xy} = \Sigma \frac{\omega^2 \pi^2}{a^2}\Big[(B_\omega + D_\omega)\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + (A_\omega + C_\omega)\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + C_n\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big]\sin\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$m\,E\,u = c' + c\,y + \Sigma\frac{\omega\pi}{a}\Big\{[(m+1)\,A_\omega + 2\,m\,C_\omega]\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + [(m+1)\,B_\omega + 2m\,D_\omega]\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + (m+1)\,C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} + (m+1)\,D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big\}\sin\frac{\omega\pi x}{a}$$

$$m\,E\,v = c'' - c\,x + \Sigma\frac{\omega\pi}{a}\Big\{[-(m+1)\,B_\omega + (m-1)\,D_\omega]\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a} + [-(m+1)\,A_\omega + (m-1)\,C_\omega]\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - (m+1)\,D_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega\pi y}{a} - (m+1)\,C_\omega\frac{\omega\pi y}{a}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega\pi y}{a}\Big\}\cos\frac{\omega\pi x}{a}$$

mit c, c', c'' als beliebigen Konstanten.

Es seien nun folgende Randbedingungen vorgeschrieben:

für $y = +b$ sei $\tau_{xy} = 0$ und $\delta\,\sigma_y = -p_0(x) = -\Sigma P_{0\omega}'\cos\frac{\omega\pi x}{a}$

» $y = -b$ » $\tau_{xy} = 0$ » $\delta\,\sigma_y = -p\,(x) = -\Sigma P_\omega'\cos\frac{\omega\pi x}{a}$

mit $P_{0\omega}'$ und P_ω' als irgend welchen Konstanten. Durch diese vier Randbedingungen sind dann die Koeffizienten $A\,B\,C\,D$ ersichtlich eindeutig bestimmt als Wurzeln von linearen Gleichungsquadrupeln, damit aber auch die Verrückungen, ferner nach (18) die Durchbiegung des Balkens und nach (17) — mit $x = \pm a$ — auch die Randkräfte und -momente. Um nun möglichst einfache Formeln zu bekommen, wollen wir die Rechnung wirklich durchführen nur für den besonderen Fall, daß alle

$$P_{0\omega}' = 0$$

sind. (Es bedeutet das nicht etwa, wie es scheinen möchte, die Beschränkung auf den Fall, daß unser Balken überhaupt nur durch Randkräfte und -momente belastet ist, sondern — wegen der noch zu überlagernden Zusatzfunktionen — nur auf den Fall, daß die Belastung der oberen Begrenzung gleichmäßig ist.)

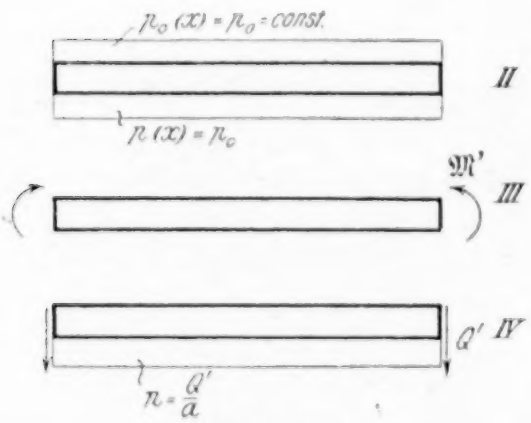


Abb. 10

Bei dieser Beschränkung bekommen wir ziemlich einfache Formeln. Indem wir die Zwischenrechnung übergehen, geben wir das Ergebnis in zusammenfassender Weise:

Wir bekommen ein in unserm Balken mögliches System von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} p_0(x) &= 0\,, \qquad p(x) = \Sigma P_\omega'\cos\frac{\omega\pi x}{a} \\ \mathfrak{M}(\pm a) &= -a^2\,\Sigma\frac{P_\omega'\cos\omega\pi}{\omega^2\pi^2}\,, \quad Q(\pm a) = \pm a\,\Sigma\frac{P_\omega'\sin\omega\pi}{\omega^2\pi^2}\,, \quad N(\pm a) = 0 \\ w_i(x) &= -\frac{a}{\delta E}\,\Sigma\,g_\omega\frac{P_\omega'}{\omega\pi}\cos\frac{\omega\pi x}{a} + K' \end{aligned}\right\}\ \text{(I)},$$

wobei zur Abkürzung

$$\vartheta = \frac{b}{a} \text{ und } g_\omega = \frac{\mathfrak{Sin}\, 4\,\omega\,\pi\,\vartheta + 4\,\omega\,\pi\,\vartheta}{\mathfrak{Sin}^2\, 2\,\omega\,\pi\,\vartheta - 4\,\omega^2\,\pi^2\,\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gesetzt ist, K' eine beliebige Konstante ist und in w_i ein an sich mögliches lineares Zusatzglied $K_1' x$ gleich weggelassen ist, weil es nachher, wenn wir den Balken mit der Unterlage verbinden, wegen der Symmetrie der Belastung ohnehin verschwinden würde.

Die Zusatzfunktionen bekommen wir, wenn wir der Reihe nach ein Polynom in x und y vom zweiten und dritten Grade — diese sind von selbst biharmonisch — und ein biharmonisches Polynom fünften Grades ansetzen und die Koeffizienten darin so bestimmen, daß wir der Reihe nach die in der Abb. 10 angedeuteten Randspannungen, -kräfte und -momente bekommen. Jeweilig ergeben sich dann folgende zusammengehörige Systeme von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung:

$$\left.\begin{array}{ll} p_0(x) = \text{konst.} = p_0 & p(x) = p_0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = 0, \quad Q(\pm a) = 0, \quad N(\pm a) = 0 & w_i(x) = -\frac{\vartheta}{E\delta}\, a\, p_0 + K'' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(II)},$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_0(x) = 0, \quad N(\pm a) = 0, & p(x) = 0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = \mathfrak{M}', \quad Q(\pm a) = 0, & w_i(x) = -\frac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\left(\frac{3}{4\,m\,\vartheta} + \frac{3}{4\,\vartheta^3}\frac{x^2}{a^2}\right) + K''' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(III)},$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = 0, \quad N(\pm a) = 0, \\ \mathfrak{M}(\pm a) = 0, \quad Q(\pm a) = \pm Q', \qquad p(x) = \frac{Q'}{a} \\ w_i(x) = \frac{Q'}{E\,\delta}\left[\frac{\vartheta}{m}\left(\frac{3}{8\,\vartheta^2} - \frac{1}{40}\right) - \frac{13}{16}\,\vartheta + \frac{3}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\,\vartheta^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{16\,\vartheta^3}\frac{x^4}{a^4}\right] + K^{(4)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(IV)}.$$

Ueberlagern wir nunmehr alle vier Systeme, so bekommen wir endlich den gewünschten Ersatz für die Differentialgleichung (3) (allerdings unter Beschränkung auf die gleichmäßige Druckbelastung $p_0(x) = \text{konst.}$):

An unserm Balken ist folgendes System von Belastung, Bettungsdruck und Durchbiegung möglich:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Belastung:} \qquad p_0(x) = \text{konst.} = p_0\,, \qquad N(\pm a) = 0 \\ \mathfrak{M}(\pm a) = \mathfrak{M}' - a^2 \Sigma \frac{P_\omega' \cos \omega\,\pi}{\omega^2\,\pi^2}\,, \qquad Q(\pm a) = \pm\left[Q' + a \Sigma \frac{P_\omega' \sin \omega\,\pi}{\omega\,\pi}\right] \\ \text{Bettungsdruck:} \quad p(x) = p_0 + \frac{Q'}{a} + \Sigma P_\omega' \cos\frac{\omega\,\pi\,x}{a} \\ \text{Durchbiegung:} \quad w_i(x) = K - \frac{\vartheta}{E\,\delta}\,a\,p_0 - \frac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\left(\frac{3}{4\,m\,\vartheta} + \frac{3}{4\,\vartheta^3}\frac{x^2}{a^2}\right) \\ + \frac{Q'}{E\,\delta}\left[\frac{\vartheta}{m}\left(\frac{3}{8\,\vartheta^2} - \frac{1}{40}\right) - \frac{13}{16}\,\vartheta + \frac{3}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\,\vartheta^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{16\,\vartheta^3}\frac{x^4}{a^4}\right] - \frac{a}{E\,\delta}\Sigma\, g_\omega \frac{P_\omega'}{\omega\,\pi}\cos\frac{\omega\,\pi\,x}{a} \end{array}\right\} \quad (20)$$

6. Der elastische Balken; Kombination des neuen Ansatzes (20) mit der Integralgleichung (8); die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Exponentialkerns. Ohne weiteres ist noch nicht erkennbar, wieso die Einführung des Systems (20) in die Integralgleichung (8) irgendwie übersichtliche Ergebnisse zutage fördern soll. Dazu ist noch nötig zu erkennen, daß die — in x geraden — Eigenfunktionen unseres Exponentialkerns (9) keine anderen sind als die Funktionen

$$\cos\frac{\omega\,\pi\,x}{a}\,,$$

vorausgesetzt, daß unter ω irgend eine Wurzel der Gleichung

$$\omega\,\pi\,\mathrm{tg}\,\omega\,\pi = a\,k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

verstanden wird. Man kann dies einfach dadurch bestätigen, daß man in die, die Eigenfunktionen ψ und die Eigenwerte λ definierende Gleichung

$$\psi(x) = \lambda \int_{-a}^{+a} \psi(\xi)\, e^{-k|x-\xi|}\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

versuchsweise $\psi = \cos\frac{\omega\pi x}{a}$ einsetzt[1]) und rechts die Integration ausführt. Dabei ergeben sich dann auch die Eigenwerte, nämlich:

$$\lambda_\omega = \frac{a^2k^2 + \omega^2\pi^2}{2ka^2} = \frac{1}{a}\frac{\omega\pi}{\sin 2\omega\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Seien nun $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots$ die nach der Größe geordneten positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung (21), von der kleinsten angefangen, so kann man versuchen, eine Funktion $f(x)$ im Intervalle von $x = -a$ bis $x = +a$ durch eine nach den entsprechenden Eigenfunktionen fortschreitende Reihe

$$f(x) = \sum_\omega A_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}, \qquad \omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots$$

darzustellen. Wenn dann diese Darstellung überhaupt existiert, so bestimmen sich wegen der sog. Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen

$$\int_{-a}^{+a} \psi_\omega(x)\,\psi_{\omega'}(x)\,dx = 0, \text{ wenn } \omega \leqq \omega'$$

die Koeffizienten A_ω analog wie bei einer Fourierschen Reihe, nämlich durch:

$$A_\omega = \frac{\omega\pi}{\omega\pi + \sin\omega\pi\cos\omega\pi}\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\cos\frac{\omega\pi x}{a}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (24).$$

Versuchen wir demgemäß die im folgenden wichtigen Darstellungen:

$$1 = \sum_\omega A_\omega^{(0)}\cos\frac{\omega\pi x}{a}, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \sum_\omega A_\omega^{(2)}\cos\frac{\omega\pi x}{a} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^4 = \sum_\omega A_\omega^{(4)}\cos\frac{\omega\pi x}{a},$$

so finden wir nach (24):

$$A_\omega^{(0)} = \frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi + \sin\omega\pi\cos\omega\pi}, \quad A_\omega^{(2)} = A_\omega^{(0)}\left(1 + \frac{2}{ak} - \frac{2}{\omega^2\pi^2}\right),$$

$$A_\omega^{(4)} = A_\omega^{(0)}\left[1 + \frac{4}{ak} - \left(1 + \frac{2}{ak}\right)\frac{12}{\omega^2\pi^2} + \frac{24}{\omega^4\pi^4}\right] \quad . \quad (25).$$

Nun ist aber leicht zu sehen, daß diese Reihen im ganzen Intervall $-a$, $+a$ gleichmäßig konvergieren, und daraus folgt nach einem Satze von Hilbert[2]), daß die Darstellungen (25) im ganzen Intervalle gelten.

---

[1]) Einen tieferen Einblick gewährt natürlich die Theorie der Integralgleichungen. Nach Früherem ist unser Exponentialkern $e^{-k|x-\xi|}$ die Greensche Funktion des Differentialausdrucks

$$L(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\frac{d^2u}{dx^2} - ku(x)\right)$$

für die Randbedingungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_a = -ku(a) \text{ und } \left(\frac{du}{dx}\right)_{-a} = ku(-a)$$

und daraus folgt nach Hilbert (a. a. O. S. 49, 50), daß die gesuchten Eigenfunktionen und Eigenwerte durch Auflösung der Differentialgleichung:

$$L(u) + \lambda u = 0, \text{ also } \frac{d^2u}{dx^2} + 2k\left(\lambda - \frac{k}{2}\right)u = 0$$

erhalten werden. Setzen wir abkürzend:

$$\omega = \frac{a}{\pi}\sqrt{2k\left(\lambda - \frac{k}{2}\right)},$$

so haben wir demnach:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{\omega\pi}{a}\right)^2 u = 0 \text{ und damit } u = C_1\cos\frac{\omega\pi x}{a} + C_2\sin\frac{\omega\pi x}{a}.$$

Mit Rücksicht auf obige Randbedingungen nun muß man

entweder $ak\cos\omega\pi = \omega\pi\sin\omega\pi$ und $C_2 = 0$

oder $ak\sin\omega\pi = -\omega\pi\cos\omega\pi$ und $C_1 = 0$ wählen.

Im ersten Fall bekommt man die geraden, im zweiten die ungeraden Eigenfunktionen. Die Eigenwerte bestimmen sich nachträglich aus der eingeführten Abkürzung.

[2]) Hilbert (a. a. O., S. 50, Satz 14).

Wir nehmen nun weiter an, daß auch $p(x)$ und $w_i(x)$ sich nach unsern Eigenfunktionen entwickeln lassen und setzen demgemäß

$$p(x) = \Sigma P_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}, \quad w_i(x) = \Sigma W_\omega \cos\frac{\omega\pi x}{a}.$$

Aus unserer Integralgleichung (8) ergibt sich dann wegen (22) und (23) folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten der beiden Entwicklungen:

$$W_\omega = \frac{c}{\lambda_\omega} P_\omega = a\,c\,\frac{\sin 2\,\omega\,\pi}{\omega\,\pi} P_\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Anderseits ist, wenn wir nunmehr das Schema (20) heranziehen und die dort vorkommenden Funktionen nach unseren Eigenfunktionen entwickeln:

$$P_\omega = P_\omega' + \left(p_0 + \frac{Q'}{a}\right) A_\omega^{(0)}$$

$$W_\omega = -\frac{a}{E\,\delta}\,g_\omega\,\frac{P_\omega'}{\omega\pi} + \left\{K - \frac{\vartheta}{a\,\delta}\,a\,p_0 - \frac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\,\frac{3}{4\,m\,\vartheta} + \frac{Q'}{E\,\delta}\left[\frac{\vartheta}{m}\left(\frac{3}{8\,\vartheta^2} - \frac{1}{40}\right) - \frac{13}{16}\,\vartheta\right]\right\} A_\omega^{(0)}$$

$$+ \left\{\frac{3}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\,\vartheta^2}\right)\frac{Q'}{E\,\delta} - \frac{3}{4\,\vartheta^2}\,\frac{\mathfrak{M}'}{E\,a\,\delta}\right\} A_\omega^{(2)} - \frac{1}{16\,\vartheta^3}\,\frac{Q'}{E\,\delta}\,A_\omega^{(4)}$$

und daraus bekommen wir, wenn wir (26) berücksichtigen und die Abkürzungen μ_0, q_0 für gewisse Konstantenkomplexe einführen, folgende Gleichung:

$$P_\omega' = \frac{2\,\omega\pi\,\sin\omega\,\pi}{a\,(g_\omega + E\,c\,\delta\,\sin 2\,\omega\,\pi)\,(\omega\,\pi + \sin\omega\,\pi\,\cos\omega\,\pi)}\left\{E\,\delta\,K - \mu_0\,\mathfrak{M}' - q_0\,Q' - \vartheta\,a\,p_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{3}{2\,\vartheta^2}\,\frac{\mathfrak{M}'}{a} - \left\{\frac{6}{\vartheta}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8\,\vartheta^2}\right) - \frac{3}{4\,\vartheta^3}\left(1 + \frac{2}{a\,k}\right) + E\,c\,\delta\,\omega\pi\,\sin 2\,\omega\,\pi + \frac{3}{2\,\vartheta^3}\,\frac{1}{\omega^2\,\pi^2}\right\} Q' - E\,c\,\delta\,\omega\,\pi\,\sin 2\,\overline{\omega}\,\pi\,a\,p_0}{\omega^2\,\pi^2}\right\} \quad (27).$$

Diesen Ausdruck für P_ω' denken wir uns in die dritte und vierte Gleichung des Schemas (20) eingesetzt, die wir übrigens wegen (21) jetzt besser so schreiben:

$$Q = Q' + a\,\Sigma\frac{P_\omega'\,\sin\omega\,\pi}{\omega\,\pi}, \quad Q + k\,\mathfrak{M} = Q' + k\,\mathfrak{M}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

dann bekommen wir zwei lineare Gleichungen zwischen den vorgeschriebenen Randkräften und -momenten Q, $\mathfrak{M}$ und den drei noch zu bestimmenden Konstanten K, $\mathfrak{M}'$, Q'. Wir stoßen hier also auf eine ganz ähnliche Unbestimmtheit der Lösung unseres Problems, wie sie bereits weiter oben auftrat und charakterisiert wurde (**5**). Nach welchen Gesichtspunkten sollen wir nun unter diesen unendlich vielen möglichen Lösungen auswählen (die sich ja übrigens wegen des St. Venantschen Prinzips, woran erinnert sei, nur in der Nähe der Ränder erheblich von einander unterscheiden werden)? Betrachten wir obigen Ausdruck für P_ω' daraufhin, welche Größenordnung er mit wachsendem ω in bezug auf ω hat! Aus der Gleichung (21) kann man leicht entnehmen, daß $\sin\omega\,\pi$ von der Größenordnung $\frac{1}{\omega}$ wird, aus (19) entnimmt man ferner, daß für wachsendes ω sich g_ω sehr schnell dem konstanten Werte 2 nähert, so daß obiger Ausdruck für P_ω' im allgemeinen, d. h. wenn nicht gerade

$$E\,\delta\,K - \mu_0\,\mathfrak{M}' - q_0\,Q' - \vartheta\,a\,p_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

gemacht wird, ebenfalls von der Größenordnung $\frac{1}{\omega}$ wird. Die Formel für den Bettungsdruck, Schema (20), enthält dann eine unendliche Reihe, welche zwar für alle $|x| < a$ konvergiert, aber für $|x| = a$ gerade schon divergiert, und zwar wie die Summe der reziproken ganzen Zahlen[1]). Es wird dann in den Ecken $x = \pm a$, $y = -b$ der Bettungsdruck unendlich groß (und beiläufig auch das σ_x, wie man leicht nachrechnet). Das hat nun zwar insofern nichts zu bedeuten, als dieses Unendlichwerden — wie wir noch deutlicher sehen werden — keinesfalls als das Auftreten konzentrierter Drucke gedeutet werden kann, aber man möchte doch, wenn möglich, gern Lösungen haben, die überhaupt ganz frei von Singularitäten sind. Zu diesem Zwecke ist nun offenbar nur nötig, zu den oben bereits erwähnten zwei Gleichungen für die drei Größen K, $\mathfrak{M}'$, Q' als dritte die Gleichung (29) hinzuzunehmen. Wenn sich dann diese Gleichungen auflösen lassen, so wird P_ω' für wachsendes ω von der Größenordnung $\frac{1}{\omega^3}$, der Bettungs-

[1]) Einen einfachen Beweis hierfür verdanke ich Herrn G. Kowalewski.

druck bleibt überall endlich und desgleichen die Randspannungen. Um noch zu erkennen, daß die drei Gleichungen wirklich eine — eindeutig bestimmte — Lösung haben, bemerken wir, daß K in (27) nur an einer Stelle vorkommt und sich also nach (29) sicher eindeutig bestimmen läßt, falls dies für $\mathfrak{M}'$ und Q' nachgewiesen ist. Kürzen wir den Ausdruck (27) unter Berücksichtigung der Gleichung (29) durch:

$$P_\omega' = \frac{\frac{\mathfrak{M}'}{a}\, a_\omega - Q'\,\beta_\omega - a\,p_0\,\gamma_\omega}{a\,\omega^3\,\pi^3}$$

ab, setzen ferner:

$$s_1 = \Sigma \frac{a_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4}, \quad s_2 = \Sigma \frac{\beta_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4}, \quad s_3 = \Sigma \frac{\gamma_\omega \sin \omega\,\pi}{\omega^4\,\pi^4} \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

so finden wir:

$$\Delta\, Q' = -\, s_1 \frac{\mathfrak{M}}{a} + \left(1 - \frac{s_1}{a\,k}\right) Q + s_3\, a\, p_0, \quad \Delta\, k\, \mathfrak{M}' = (1 - s_2)\, k\, \mathfrak{M} - s_2\, Q - s_3\, a\, p_0 \quad (31),$$

wobei

$$\Delta = 1 - \frac{s_1}{a\,k} - s_2 = a\,k\,\Sigma \frac{\left(g_\omega - \frac{3}{2\,\vartheta^3\,\omega^3\,\pi^3} - \frac{6}{5\,\vartheta\,\omega\,\pi}\right) \sin 2\,\omega\,\pi}{\omega^2\,\pi^2\,(g_\omega + E\,c\,\delta \sin 2\,\omega\,\pi)\,(\omega\,\pi + \sin \omega\,\pi \cos \omega\,\pi)}$$

ist. Dieser Ausdruck Δ aber kann nicht Null werden, weil unter dem Summenzeichen nur positive Ausdrücke stehen. Dies ist, wegen der Gleichungen (21) und (19), für alle ohne weiteres klar, mit Ausnahme des ersten Klammerinhaltes. Dieser aber ist positiv, weil die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2z + 2z}{\mathfrak{Sin}^2 z - z^2} - \frac{12}{z^3} - \frac{12}{5z}$$

für alle positiven Werte von z positiv ist. Man kann dies durch einfache Ausrechnung feststellen, wobei es zweckmäßig ist, für die kleineren z die Reihenentwicklung:

$$\varphi(z) = \frac{64}{175} z + \frac{4}{1575} z^3 \pm \ldots$$

zu benutzen. Es ist also stets $\Delta > 0$ und die Gleichungen (31) haben immer eine eindeutig bestimmte, endliche Lösung.

Es ist uns somit gelungen, bei der gleichmäßigen Belastung $p_0(x) = \text{konst.}$ und beliebig vorgeschriebenen Randkräften und Momenten Q und $\mathfrak{M}$ eine völlig singularitätenfreie Lösung unseres Problems zu finden (bei der überdies noch die die Q und $\mathfrak{M}$ aufbauenden Randspannungen überall endlich sind) und damit ist wohl einwandfrei dargetan, daß das früher bei Beibehaltung der Differentialgleichung (3) notwendige Hinzufügen konzentrierter Drucke an den Balkenenden lediglich einen Notbehelf bedeutet, welcher der nur bedingten Brauchbarkeit dieser Gleichung entspricht.

Wir wollen uns aus der unendlichen Schar möglicher Lösungen jetzt noch eine zweite, nach einem ganz andern Gesichtspunkte, aussuchen. Das schon erwähnte schwache Unendlichwerden des Bettungsdruckes an den Balkenenden soll uns jetzt nicht stören; die uns verbleibende Willkür bei der Bestimmung der drei Konstanten K, $\mathfrak{M}'$, Q' wollen wir benutzen, um möglichst schnell möglichst einfache Formeln zu bekommen. Ein Blick auf die Schemata (II, III, IV) zeigt, daß alles viel kürzer wird, wenn wir auf die Zusatzfunktion IV ganz verzichten und demnach

$$Q' = 0$$

wählen. Beschränken wir uns überdies auf den Fall, daß die Randkräfte und Momente verschwinden, so folgt aus (28), daß auch $\mathfrak{M}'$ verschwindet; es wird alles so einfach wie nach Lage der Dinge überhaupt möglich. Wir bekommen:

$$P_\omega' = \frac{2\,\omega\,\pi \sin \omega\,\pi}{a\,(g_\omega + E\,c\,\delta \sin 2\,\omega\,\pi)\,(\omega\,\pi + \sin \omega\,\pi \cos \omega\,\pi)} \left(E\,\delta\, K - \vartheta\, a\, p_0 - E\,c\,\delta\, a\, p_0 \frac{\sin 2\,\omega\,\pi}{\omega\,\pi}\right),$$

wo sich K durch die Gleichung:

$$E\,\delta\, K = \left(E\,c\,\delta \frac{s_5}{s_4} + \vartheta\right) a\, p_0$$

bestimmt, wenn zur Abkürzung

$$s_4 = \Sigma \frac{\sin^2 \omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin \omega\pi \cos \omega\pi)}$$

$$\text{und } s_5 = \Sigma \frac{\sin^2 \omega\pi \sin 2\omega\pi}{\omega\pi (g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin \omega\pi \cos \omega\pi)}$$

gesetzt wird. Somit haben wir:

Wird der Balken oben gleichmäßig mit p_0 belastet, während an den Balkenenden weder Biegungsmomente noch Schubkräfte wirken, so stellen die Formeln

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= p_0 \left\{ 1 + 2Ec\delta \Sigma \frac{\left(\frac{s_5}{s_4} - \frac{\sin 2\omega\pi}{\omega\pi}\right) \omega\pi \sin \omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin \omega\pi \cos \omega\pi)} \cos \frac{\omega\pi x}{a} \right\} \\ w_i(x) &= 2acp_0 \Sigma \frac{\left(\frac{s_5}{s_4} Ec\delta + \frac{g_\omega}{\omega\pi}\right) \sin \omega\pi \sin 2\omega\pi}{(g_\omega + Ec\delta \sin 2\omega\pi)(\omega\pi + \sin \omega\pi \cos \omega\pi)} \cos \frac{\omega\pi x}{a} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

ebenfalls eine Lösung unseres Problems dar.

Um endlich noch zu erkennen, daß das obige Unendlichwerden von $p(x)$ an den Balkenenden keine konzentrierten Drucke bedeutet, genügt es zu zeigen, daß eine Funktion $p(x)$, die an den Balkenenden in konzentrierte Drucke ausartet, überhaupt nicht nach unsern Eigenfunktionen entwickelt werden kann. Treffen wir etwa folgende Festsetzungen. Es sei:

$$p(x) = \frac{D}{\varepsilon a} \text{ für } -a \leqq x \leqq -a(1-\varepsilon), \quad p(x) = \frac{D}{\varepsilon a} \text{ für } a(1-\varepsilon) \leqq x \leqq a$$

$$\text{und } p(x) = 0 \text{ für } -a(1-\varepsilon) < x < a(1-\varepsilon),$$

so bedeutet das, wenn wir ε gegen Null gehen lassen, das Auftreten der beiden konzentrierten Drucke D an den beiden Balkenenden. Die Koeffizienten der gesuchten Reihenentwicklung werden dann nach (24)

$$A_\omega = \frac{4D}{a} \frac{\omega\pi}{\omega\pi + \sin \omega\pi \cos \omega\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin {}^1\!/_2 \omega\pi\varepsilon}{\omega\pi\varepsilon} \cos \omega\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

liefern also in der Grenze $\varepsilon = 0$ überhaupt keine konvergente Reihe. (Statt dessen hätte man natürlich auch zeigen können, daß die Funktion

$$f(x) = \int_0^x p(z)\, dz,$$

wo p aus (32) zu entnehmen ist, eine im ganzen Intervall $|x| \leqq a$ stetige Funktion ist und dies wiederum würde — im wesentlichen — damit gleichbedeutend sein, daß die Reihe

$$\Sigma \frac{\sin \frac{\omega\pi x}{a}}{\omega^2}$$

im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert).

7. Uebergang vom elastischen zum starren Balken. Wäre die Darstellung eines konzentrierten Druckes durch unsere Eigenfunktionen möglich, so müßten wir erwarten, daß, wenn wir in unseren Lösungen (31) und (32) vom elastischen zum starren Balken übergehen, die bis dahin nicht vorhandenen konzentrierten Drucke an den Balkenenden irgendwie plötzlich auftauchen. So aber kann eine Bestätigung des früher auf anderem Wege gefundenen Ergebnisses, daß diese konzentrierten Drucke beim starren Balken wirklich da sind, durch unsere Formeln (31) und (32) nur im negativen Sinne erwartet werden; wir haben zu zeigen, daß diese Formeln, auf den starren Balken angewandt, irgendwie versagen.

Dies ist am leichtesten bei unserer zweiten Lösung (32) zu sehen; wir brauchen nur die Formel für den Bettungsdruck ins Auge zu fassen. Solange E noch endlich ist (elastischer Balken), verschwindet im Nenner für genügend großes ω das Glied $Ec\delta \sin 2\omega\pi$ neben g_ω, die Reihenkoeffizienten konvergieren also, wie $\frac{1}{\omega}$, gegen Null. Wächst aber E über alle Grenzen (starrer Balken), so konvergiert die Reihe überhaupt nicht, sie wird sinnlos.

Wesentlich anders liegen die Dinge bei unserer ersten Lösung (31). Hier müssen wir noch beachten, daß ein bloßer Uebergang zu $E = \infty$ noch keinen Uebergang zum

starren Balken bedeutet, sofern nicht noch ausdrücklich verlangt wird, daß dabei alle am Balken wirkenden Kräfte endlich bleiben. Nun zeigen die Formeln (30), daß mit wachsendem E die an den Rändern hinzuzufügenden Kräfte Qund Momente $\mathfrak{M}'$ — da Δ von der Größenordnung $\frac{1}{E}$ wird, während die Summen s_2 und s_3 endlich bleiben — von der Größenordnung E werden. Wir können also von unserer ersten Lösung (31) aus im allgemeinen überhaupt nicht zum starren Balken gelangen. Es gibt aber eine Ausnahme, wenn nämlich $p_0 = 0$, $Q = 0$, aber $\mathfrak{M} \leqq 0$ vorgeschrieben, der Balken also lediglich durch zwei gleiche Biegungsmomente an seinen Enden belastet wird. Natürlich sagt uns die unmittelbare Anschauung, daß, wenn jetzt der Balken starr ist, Bettungsdruck und Einsenkung Null werden müssen. Um aber zu sehen, daß dies bei unsern Formeln ebenfalls herauskommt, wenn E unendlich wird, ist noch folgende kleine Ueberlegung nötig: Geht E gegen ∞, so wird nach (31), (30) und (27):

$$\Delta = \frac{1}{\varrho E}, \quad s_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad 1 - s_2 = \frac{\sigma_2}{E},$$

wo $\varrho, \sigma_1, \sigma_2$ endliche Größen sind. Die Formeln (31) liefern also:

$$\mathfrak{M}' = \varrho\,\sigma_2\,\mathfrak{M}, \quad Q' = -\varrho\,\sigma_1\,\frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Aus (27) folgt dann:

$$P'_\omega = \frac{\varrho\,\sigma_1\,\mathfrak{M}}{a^2}\,\frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi + \sin\omega\pi\cos\omega\pi}$$

und damit aus (25) und (20):

$$p(x) = -\varrho\,\sigma_1\,\frac{\mathfrak{M}}{a^2} + \varrho\,\sigma_1\,\frac{\mathfrak{M}}{a^2} = 0.$$

Andererseits liefert die Gl. (29):

$$K = 0$$

und somit nach (20) auch:

$$w_i(x) = 0.$$

Durch diese Betrachtungen scheinen alle Fragen, die sich beim Uebergang zum starren Balken ergeben, hinreichend beantwortet.

8. Zahlenbeispiel. Der Balken habe die Abmessungen: Länge $2a = 256$ cm, Höhe $h = 16$ cm, Dicke $\delta = 25$ cm, der Elastizitätsmodul sei $E = 100\,000$ kg/cm², die Konstante $c = \frac{1}{100\,000}$ cm/kg, $k = \frac{4}{a}$.

Die Balkenenden seien frei von Biegungsmomenten und Schubkräften:

$$Q = 0, \quad \mathfrak{M} = 0.$$

Einige Daten über die Wurzeln der Gl. (21) im Falle $ak = 4$ können der folgenden Zahlentafel entnommen werden.

	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log brigg ω_n	0,10195	0,59496	0,83340	0,99175	1,10950	1 20286	1,28004	1,34567	1,40294	1,45353
$(\omega_n - n)\,\pi$	72°27'20"	45°28'5"	30°24'50"	22°10'45"	17°16'5"	14°4'30"	11°51'15"	10°13'45"	8°59'15"	8°0'50"

Ich habe für dieses Beispiel beide Lösungen (31) und (32) berechnet und diese, obwohl ja auf ganz verschiedenen Wegen gefunden, unterscheiden sich nun hinsichtlich der Einsenkung fast gar nicht und hinsichtlich des Bettungsdruckes auch nur in nächster Nähe der Balkenenden ein wenig (während an den Enden selbst das eine Mal p endlich bleibt und das andere Mal unendlich wird). Diese Uebereinstimmung mag einerseits als Probe für die Richtigkeit der Zahlenrechnungen dienen, andererseits zeigt sie die große Zuverlässigkeit des St. Venantschen Prinzips in unserem Falle.

Was nun zunächst die Einsenkung angeht, so unterscheidet sie sich so wenig von derjenigen, die bei konstantem Bettungsdruck vorhanden wäre, daß es geradezu zweckmäßig erscheint, diesen Bestandteil von ihr abzuspalten und den Rest besonders zu betrachten. Setzen wir demnach:

$$w_i = w_{i1} + w_{i2}$$

mit

$$w_{i1} = \frac{c p_0}{k}\left(2 - e^{-k(a+x)} - e^{-k(a+x)}\right),$$

so geben die folgende Zahlentafel und die Abb. 11 eine Vorstellung vom Verlauf und der gegenseitigen Größenordnung dieser Bestandteile:

	$\frac{x}{a} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$w_{i1}'(x)$	0,491	0,490	0,488	0,483	0,476	0,466	0,449	0,424	0,388	0,332	0,250
$w_{i2}'(x)$	0,004	0,004	0,003	0,002	0,000	− 0,003	− 0,008	− 0,011	− 0,014	− 0,008	0,010

$$\left(w_i' = \frac{k}{c p_0}\, w_i\right).$$

Aus dieser Abbildung läßt sich auch der Verlauf des Bettungsdruckes qualitativ recht gut ablesen, denn die Operation

$$\frac{1}{2c}\left(k\, w_i(x) - \frac{1}{k}\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right)$$

— vergl. die Gl. (13) — liefert, angewandt auf w_{i1} den konstanten Teil des Bettungsdruckes (der natürlich gleich p_0, dem konstanten Belastungsdruck, ist) und somit, auf w_{i2} angewandt, die Abweichung des $p(x)$ von p_0. Insbesondere deutet schon die scharfe Krümmung der w'_2-Kurve am Balkenende darauf hin, daß dort $\left|\frac{d^2 w_i}{dx^2}\right|$ und damit p sehr groß wird (bei der Lösung (32) am Ende selbst natürlich unendlich groß). Abb. 12 gibt eine genauere Vorstellung vom Verhalten des Bettungsdruckes. Obwohl also die Einsenkung fast gerade so ausfällt wie beim absolut biegsamen Balken mit seinem konstantem Bettungsdruck, weicht doch der Bettungsdruck selbst erheblich von einer Konstanten ab, nur in den mittleren Teilen des Balkens, etwa bis $x \pm 0{,}6\,a$, ist sehr nahezu $p = p_0$.

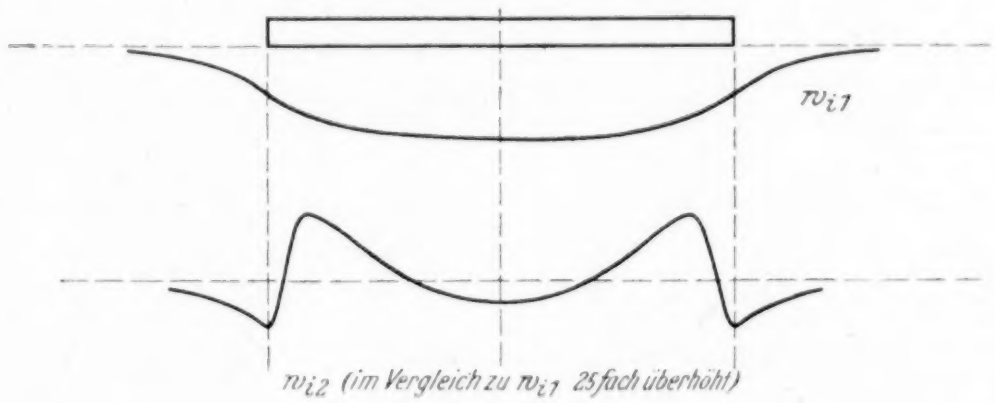


Abb. 11

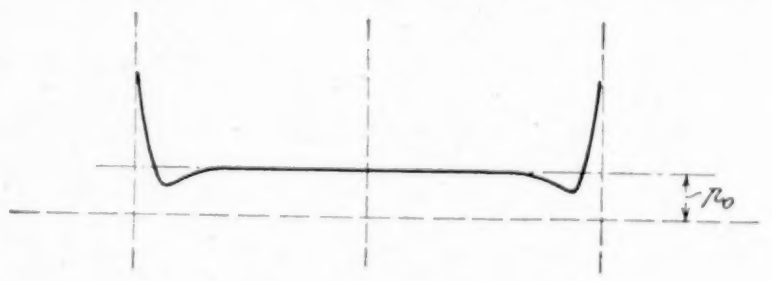


Abb. 12

Die letzte Abb. 13 endlich wurde dadurch gewonnen, daß unser Zahlenbeispiel nach der früher (4) angedeuteten, aber nicht näher geschilderten Möglichkeit, die Differentialgleichung (3) neben der Integralgleichung (8) beizubehalten, durchgerechnet wurde. Man sieht, daß diese gröbere Methode wenigstens in den mittleren Balkenteilen ganz brauchbare Ergebnisse liefert.

Zu den Rechnungen im einzelnen sei nur erwähnt, daß der Ausdruck A in (29) bei den angenommenen Zahlenverhältnissen sehr klein wird, so daß seine Berechnung einige Vorsicht erfordert.

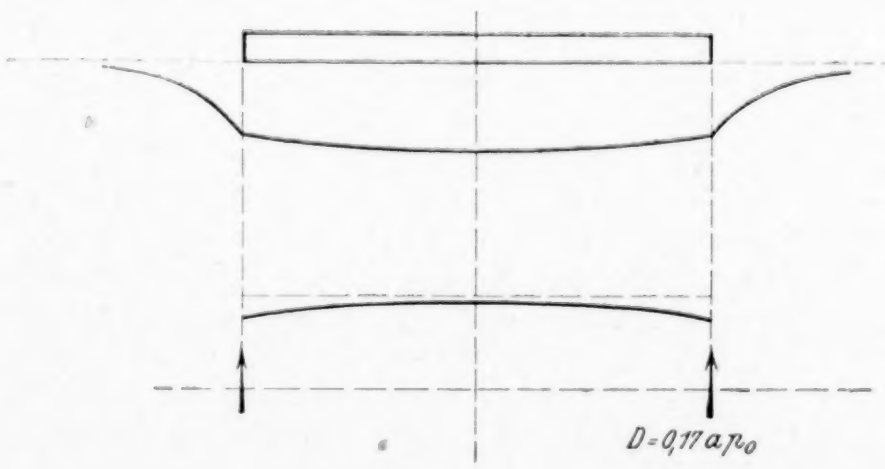


Abb. 13

9. Zusammenfassung. Wir haben im vorigen durch Modifikation der Zimmermannschen Theorie (A) zwei neue gewonnen, eine teilweise (B) und eine vollständig modifizierte (C). Die Grundlagen und allgemeinen Er-

gebnisse der drei Theorien sollen noch zum Schluß kurz und übersichtlich zusammengefaßt werden.

Grundlagen.

A 1. Die Einsenkung an irgend einer Stelle hängt nur vom Bettungsdruck an eben dieser Stelle ab, und zwar wird Proportionalität zwischen beiden angenommen.
2. Für das Verhalten des Balkens ist die Differentialgleichung der elastischen Linie maßgebend.

B 1. Die Einsenkung an irgend einer Stelle hängt von der gesamten Bettungsdruckverteilung ab; die Proportionalität wird wegen der Kleinheit der Einsenkungen beibehalten. Damit geraten wir in die Theorie der linearen Integralgleichungen hinein.
2. Wie unter A 2.

C 1. Wie unter B 1.
2. Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird durch einen Zusammenhang ersetzt, der sich aus der Theorie der Airyschen Spannungsfunktion ergibt.

Allgemeine Ergebnisse.

I. Einsenkung.

A. Die Einsenkungskurve ist an den Balkenenden unstetig; die Unterlage reißt dort entzwei.

B. Die Unterlage zerreißt nicht; die Einsenkungskurve ist überall stetig, aber an den Balkenenden weist sie Knicke auf.

C. Wie unter B, aber mit dem Unterschied, daß die Knicke nur im Grenzfall des starren Balkens auftreten. Beim elastischen Balken kann es höchstens vorkommen, daß die Einsenkungskurve an den Balkenenden Wendepunkte mit vertikaler Tangente hat.

II. Bettungsdruck.

A. Diese Theorie läßt nicht erkennen, daß der Bettungsdruck die Tendenz hat, an den Balkenenden stark anzuschwellen.

B. Diese Theorie gibt die erwähnte Tendenz qualitativ richtig wieder, quantitativ übertreibt sie, insofern bei ihr nicht nur für den starren, sondern auch für den elastischen Balken der Bettungsdruck an den Balkenenden geradezu in konzentrierte Drucke ausartet.

C. Die Ausartung in konzentrierte Drucke kommt nur beim starren Balken heraus. Im Fall des elastischen Balkens kann man sogar immer, also insbesondere bei beliebig vorgeschriebenen Randkräften und -momenten, die an den Kopfenden des Balkens wirkenden Randspannungen so verteilen, daß der Bettungsdruck auch an den Balkenenden endlich bleibt. Tut man dies nicht, so kann höchstens ein schwaches Unendlichwerden von $p(\pm a)$ vorkommen (das aber nicht als Ausartung in konzentrierte Drucke zu deuten ist).

Hier bleibt aber sogar die Vermutung frei, daß selbst dieses schwache Unendlichwerden nicht eigentlich sachlich begründet ist, daß es vielmehr im vorigen nur deshalb vorgekommen ist, weil wir über die erwähnten Randspannungen zwar mit einiger Freiheit, aber doch nicht ganz frei verfügen konnten; jedenfalls ist immer dann, wenn in unseren Formeln $p(\pm a)$ unendlich wird, auch die Randspannung σ_x an den Stellen $x = \pm a$, $y = -b$ unendlich; es könnte also sein, daß $p(\pm a)$ nur deshalb unendlich wird, weil dieses σ_x als unendlich »vorgeschrieben« wurde. Freilich ist es nicht leicht, eine wirkliche Entscheidung über unsere Vermutung herbeizuführen. Man müßte dazu die allgemeinste Airysche Spannungsfunktion des Rechteckes heranziehen. Man könnte dann die erwähnten Randspannungen als ganz beliebige endliche Größen vorschreiben. Sollte dann immer $p(\pm a)$ endlich bleiben, so wäre unsere Vermutung als zutreffend erwiesen. Aber die Durchführung dieses Programms begegnet großen Schwierigkeiten, die in dem früher erwähnten komplizierten Charakter der obigen Spannungsfunktion begründet sind und die ich bisher nicht habe überwinden können.

Dresden, den 29. Januar 1922. 156

Über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Bleche.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

In Bd. 1 dieser Zeitschrift, S. 174 bis 180, veröffentlicht Hr. Th. Pöschl-Prag einen Aufsatz, in dem die Spannungen im allseits gleichmäßig gezogenen, mit zwei gleich großen Löchern versehenen Bleche untersucht werden. Er verwendet hierbei als Koordinatensystem das Doppelsystem zweier Kreisbüschel, das zu zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten gehört. Die Gleichungen sind daher für den mit diesem Hilfsmittel der Rechnung nicht Vertrauten unübersichtlich, auch sind wohl aus diesem Grunde in der Zahlentafel einige Fehler unterlaufen. In vorliegender Arbeit will ich die Lösung im rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen und untersuchen.

Das Blech stellt eine dreifach zusammenhängende unendliche Scheibe dar; außer dem inneren Zusammenhange, der durch die Airysche Spannungsfunktion gewährleistet wird, muß sich die Scheibe um jedes Loch herum wieder schließen. Dieses ist in der Arbeit nicht berücksichtigt, was im weiteren ebenfalls nachgewiesen wird. Die angegebene Lösung stellt demnach nur eine Scheinlösung dar.

Ich setze den Abstand der Mittelpunkte der Kreise gleich $2a$, den Halbmesser gleich $r_0 < a$, die Entfernung der reellen Grundpunkte gleich $2c = 2\sqrt{a^2 - r_0^2}$. Der Teil der Fläche zwischen den Kreisen werde als Steg bezeichnet; die schmalste Stelle desselben ist gleich $2b_0 = 2(a - r_0)$. Das Koordinatensystem ist nach Abb. 1 gelegt. Die Scheibe sei allseitig gleichmäßig gespannt, wobei die Spannung im Unendlichen gleich p ist.

Die von Hrn. Pöschl gefundene Airysche Spannungsfunktion schreibt sich dann im rechtwinkligen Koordinatensystem:

$$F = \frac{p}{2}\left\{x^2 + y^2 + \frac{r_0^2}{c}\, y\,[\ln[x^2 + (y+c)^2] - \ln[x^2 + (y-c)^2]]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Sie ist symmetrisch zur X- und Y-Achse. Für die Punkte des oberen Kreises $x^2 + (y-a)^2 = r_0^2$ wird

$$F = \frac{p}{2}\left[y\left(2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right) - c^2\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Punkte der Funktion F liegen demnach auf einer von der X-Achse abfallenden Ebene, welche die Neigung $\frac{p}{2}\left(2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$ zur XY-Ebene hat.

Die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ wird:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{2}\left\{2y + \frac{r_0^2}{c}[\ln[x^2 + (y+c)^2] - \ln[x^2 + (y-c)^2] + \frac{r_0^2}{c}\, y\left[\frac{2(y+c)}{x^2 + (y+c)^2} - \frac{2(y-c)}{x^2 + (y-c)^2}\right]\right\}.$$

Für die Punkte des oberen Kreises ist

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{p}{2}\left[2a + \frac{r_0^2}{c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit Gl. (2) zeigt, daß in diesen Punkten die Fläche der Airyschen Spannungsfunktion tangential in die geneigte Ebene übergeht. Am Umfange des Kreises treten darum keine äußeren Kräfte auf. Man erhält einen unbelasteten Lochrand. Dasselbe gilt auch für den symmetrisch liegenden unteren Kreis.

Aus Gl. (1) lassen sich nun mit Leichtigkeit die Spannungen als zweite partielle Ableitungen der Funktion F finden. Besondere Aufmerksamkeit wird man der Spannung σ_x für die Punkte der Y-Achse schenken. Man erhält

$$F_{x=0} = \frac{p}{2}\left\{y^2 + 2\,\frac{r_0^2}{c}\, y\,[\ln(y+c) - \ln(y-c)]\right\},$$

$$(\sigma_x)_{x=0} = \frac{\partial^2 F_{x=0}}{\partial y^2} = p\left[1 + \frac{4 r_0^2 c^2}{(c^2 - y^2)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

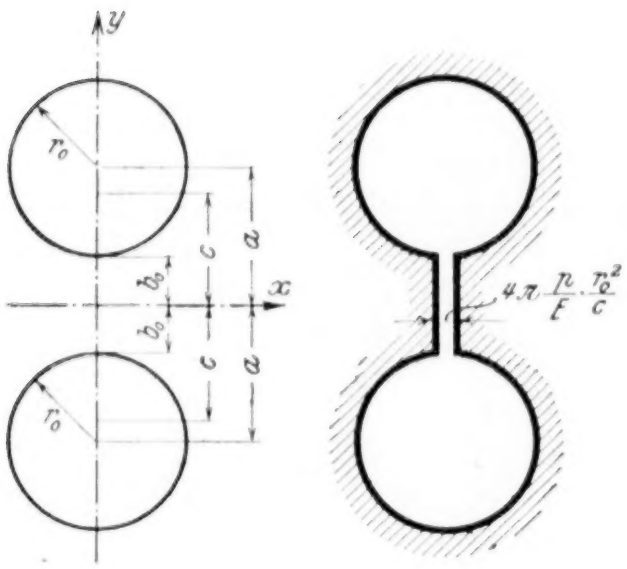
Die Spannung ist stets größer als p und wächst von $\sigma_x = p$ für $y = \infty$ bis $\sigma_x = \infty$ für $y = c$, nimmt dann wieder ab bis zur X-Achse. Für negative Werte von y erhält man das Spiegelbild hiervon. Herrn Prof. Th. Pöschl müssen bei der Berech-

nung der Zahlentafel kleine Irrtümer unterlaufen sein, da er für die Y-Achse auch Werte $\sigma_x < p$ erhält. Auch seine Abb. 3 ist nicht ganz richtig, da die σ_x-Linien für verschiedene Kreishalbmesser sich nicht überschneiden.

Die größten Spannungen im Bleche treten für $y = \pm (a-r)$ und $y = \pm (a+r)$ auf und sind:

$$\text{Für } x = 0;\ y = a-r \ldots\ \sigma_x = 2\,\frac{a}{a-r}\,p = 2\,\frac{a}{b_0}\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

$$\text{Für } x = 0;\ y = a+r \ldots\ \sigma_x = 2\,\frac{a}{a+r}\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$



Gleichung (5) gibt die absolut größte Spannung im Bleche. Sie läßt sich auf folgende Weise leicht merken: Zwischen den Mittelpunkten der Kreise tritt in X-Richtung im heilen Bleche die Kraft $2ap$ auf. Soll sie durch den Steg übertragen werden (in Wirklichkeit ist die übertragene Kraft im Stege eine etwas andere), so erhält man in der schmalsten Stelle des Steges die Spannung $\sigma_x = \frac{a}{b_0}\,p$. Die berechnete Spannung nach Gl. (5) ist doppelt so groß.

Ich will nun die durch diesen Spannungszustand entstehende Formänderung der Scheibe untersuchen. Ich zerlege hierzu die gefundene Airysche Spannungsfunktion wie folgt:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5;$$

$$F_1 = \frac{p}{2}\,(x^2 + y^2), \quad F_2 = -\frac{p}{2}\,r_0^2 \ln [x^2 + (y+c)^2], \quad F_3 = -\frac{p}{2}\,r_0^2 \ln [x^2 + (y-c)^2],$$

$$F_4 = \frac{p_0}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,(y+c) \ln [x^2 + (y+c)^2], \qquad F_5 = \frac{p_0}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,(y-c) \ln [x^2 + (y-c)^2].$$

Die gefundene Lösung Gl. (1) entsteht durch Ueberlagerung der Spannungsfunktionen F_1 bis F_5. Hiervon stellt F_1 eine gleichmäßige allseitige Spannung, F_2 und F_3 einen vom Punkte $x = 0$, $y = -c$, bezw. vom Punkte $x = 0$, $y = c$ ausgehenden allseitigen Druck dar. Der Zusammenhang der Scheibe bleibt hierbei gewahrt.

Die Formänderung durch F_4 werde besonders untersucht. Verschiebt man das Koordinatensystem, so daß $y_1 = y + c$ wird, so ist

$$F_4 = \frac{p}{2}\,\frac{r_0^2}{c}\,y_1 \ln (x^2 + y_1^2).$$

Die Verschiebungen ξ in X-Richtung berechnen sich wie folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right), \qquad \xi = \frac{1}{E}\int_{x=0}^{x}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\,\sigma_y\right) dx.$$

Hierin ist

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_1^2} = p\,\frac{r_0^2}{c}\,\frac{3x^2 y_1 + y_1^3}{(x^2 + y_1^2)^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} = p\,\frac{r_0^2}{c}\,\frac{y_1^3 - x^2 y_1}{(x^2 + y_1^2)^2}.$$

Es wird

$$\xi = \frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c}\left(2\ \operatorname{arctg}\frac{x}{y_1} - \frac{x y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{1}{m}\,\frac{x y_1}{x^2 + y_1^2}\right).$$

Für die Punkte der positiven Y_1-Achse, $x = 0$ und $y_1 > 0$ ist $\xi = 0$ angenommen. Es ist $\operatorname{arctg}\frac{x}{y_1}$ der Winkel φ zwischen der positiven Y_1-Achse und der Verbindungsgeraden des beliebigen Punktes (x, y_1) mit dem Koordinaten-Anfangspunkte. Geht man um letzteren Punkt herum, vergrößert man also den Winkel φ von 0 bis 2π, so kommt man wieder auf die Punkte der positiven Y_1-Achse; diese haben jedoch dann die Verschiebung

$$\xi = 4\pi\,\frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Scheibe schiebt sich oberhalb des Koordinatenanfangspunktes, welcher zum Unstetigkeitspunkte wird, übereinander um den unveränderlichen Betrag $4\pi\,\frac{p}{E}\,\frac{r_0^2}{c}$. Dieser

Spannungszustand kann dadurch entstehen, daß für positive y ein schmaler Streifen von der Breite $4\pi \frac{p}{E} \frac{{r_0}^2}{c}$ herausgeschnitten und die Scheibe gewaltsam wieder verbunden ist. Man hat es demnach mit einer Vorspannung der unbelasteten Scheibe oder Eigenspannung zu tun.

In der allgemeinen Lösung F entspricht sowohl die Funktion F_4 wie auch F_5 einem solchen Spannungszustande. Nur hat F_5 das entgegengesetzte Vorzeichen und der Unstetigkeitspunkt liegt oberhalb der Y-Achse.

Der von Hrn. Pöschl gefundene Spannungszustand entsteht demnach in einer gleichmäßig allseitig gezogenen Scheibe mit zwei Löchern, deren Steg vor der Belastung um die Länge $4\pi \frac{p}{E} \frac{{r_0}^2}{c}$ gekürzt worden ist. Die Scheibe hat im unbelasteten Zustande eine bestimmte Vorspannung und zwar ist dies im Stege eine Zugspannung. Schneidet man den Steg durch, so klafft die unbelastete Scheibe nach Abb. 2 auf.

Für die Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern ohne Vorspannung — und dieser Fall ist wohl nur von Wichtigkeit — wäre demnach die genaue Lösung noch zu finden [1]).

* * * [118]

Der vorstehende Aufsatz ist von der Schriftleitung Hrn. Th. Pöschl zur Kenntnis gebracht worden, der sich hierzu wie folgt äußert:

Durch ein Versehen ist es mir in der Tat entgangen, daß der Verzerrungszustand, der dem von mir angegebenen Spannungszustande entspricht, nicht eindeutig ist; die Behauptung des Hrn. C. Weber, daß durch diese Lösung das Spannungsproblem der Scheibe mit zwei Löchern nicht erledigt ist, ist daher allem Anscheine nach zutreffend.

Bezüglich der meisten anderen Behauptungen kann ich jedoch den Standpunkt ihres Verfassers nicht teilen. Insbesondere scheint er das Wesen der »angepaßten Koordinaten« nicht entsprechend einzuschätzen, durch deren Verwendung es in der Regel allein — wenn überhaupt — gelingt, auf direktem Wege Lösungen für derartige Probleme zu finden, wie ich sie mir in dem in Rede stehenden Aufsatze gestellt. Hinterher ist es freilich ohne Schwierigkeit möglich, zu den bevorzugten Cartesischen Koordinaten zurückzukehren und mit ihnen weiterzuarbeiten. Für die Ermittlung des Verzerrungszustandes ist übrigens das von Love (Theorie der Elastizität, deutsch von Timpe, Leipzig 1907, S. 242 u. f.) angegebene allgemeine Verfahren vorzuziehen.

Auch die an Gl. (4) seines Aufsatzes angeschlossenen Bemerkungen erscheinen mir teilweise unzutreffend, da darin doch $y = c$ nur für $r_0 = 0$, also für die »punktierte« Scheibe, gesetzt werden kann; es folgt

$$(\sigma_x)_{x=0,\, y=c,\, r_0=0} = p \lim_{\substack{y=c,\\ r_0=0}} \left[1 + \frac{4 {r_0}^2 c^2}{(c+y)^2 (c-y)^2}\right] = 2p,$$

welcher Wert auch von mir angegeben wurde; dagegen müssen die in Abb. 3 meiner Arbeit gezeichneten Kurven, die den Spannungsverlauf außerhalb der Löcher darstellen, richtig oberhalb der Linie $p = 1$ verlaufen, und auch in der Zahlentafel am Schlusse sind die betreffenden Werte zu berichtigen. Th. Pöschl. [118a]

Untersuchungen über Wälzhebelmechanismen.

Von **H. ALT** in Dresden.

Unter Wälzhebelmechanismen sollen diejenigen Mechanismen verstanden werden, bei denen die gegenseitige Bewegung bestimmter Glieder durch die Berührung in Kurven gekennzeichnet ist und daher in dem Abwälzen der beiden Kurven aufeinander besteht [2]). Diese beiden Kurven sollen Wälzkurven und die beiden entsprechenden Glieder des Mechanismus Wälzhebel genannt werden. Die wichtigsten Anwendungen der Wälzhebelmechanismen, die zu den unselbständigen höheren Elementenpaarketten gehören, sind die Wälzhebelsteuerungen der Kolbenmaschinen.

[1]) Die Lösung, die inzwischen von mir aufgefunden wurde, soll demnächst veröffentlicht werden. (Zusatz bei der Korrektur.)

[2]) Hierüber vergl. H. Holzer, Wälzhebel, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., 1908, S. 2043 bis 2051.

schreiben läßt. Dann ergibt sich aus (6)

$$\vartheta = -\int \frac{db}{b \operatorname{tang} \alpha} + \text{konst.} = -\cot\alpha \lg b + \text{konst.}$$

oder, wenn man dem Anfangswerte $\vartheta = 180^0$ die Ordinate $b = b_0$ zuordnet,

$$\vartheta = 180^0 - \cot\alpha \lg \frac{b}{b_0}.$$

Ferner wird

$$\frac{db}{d\vartheta} = -b \operatorname{tang} \alpha.$$

Aus (5a) findet man nun

$$\varrho_p = b \operatorname{tang} \alpha, \qquad \varphi_p = \cot\alpha \lg \frac{b}{b_0},$$

woraus nach Elimination des Parameters b

$$\varrho_p = b_0 \operatorname{tang} \alpha \, e^{\varphi_p \operatorname{tang} \alpha}$$

folgt. Die bewegte Wälzkurve (π) ist hiernach eine logarithmische Spirale, deren Konstante sich aus der vorstehenden Gleichung ergeben und die sich leicht aufzeichnen läßt (Abb. 4).

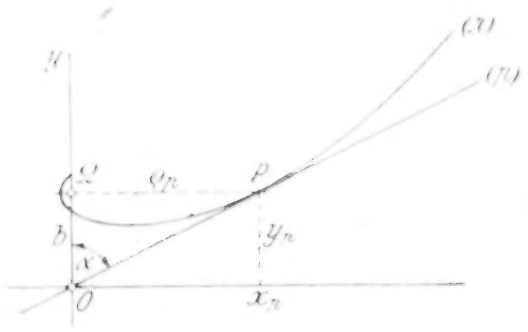


Abb. 4

Die Behandlung des umgekehrten Falles, daß die bewegte Wälzkurve (π) gegeben und die ruhende Wälzkurve (p) zu ermitteln ist, soll unmittelbar an einem praktisch wichtigen Beispiel dargelegt werden. Die bewegte Wälzkurve sei als Gerade gegeben. Wir wählen die ξ-Achse parallel dieser Geraden, so daß sich deren Gleichung in der Form

$$\varrho_p = \frac{h}{\sin \varphi_p}$$

schreiben läßt. Hieraus folgt nach (5a)

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{h}{\sin \vartheta}.$$

Die Integration liefert

$$b = h \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + \text{konst.} = h \lg \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} + \text{konst.}$$

Setzt man zur Bestimmung der Integrationskonstanten für die Anfangslage $\vartheta = \vartheta_0$, $b = 0$, so wird

$$b = h \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\vartheta_0}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{db}{d\vartheta} = \frac{h}{\sin \vartheta}.$$

Nach (4) ist nunmehr die ruhende Wälzkurve (p) bestimmt. Unter Benutzung des Winkels ϑ als Parameter läßt sie sich schreiben

$$x_p = -\frac{h}{\sin \vartheta}, \qquad y_p = h \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Dieses Ergebnis ermöglicht eine punktweise Bestimmung der gesuchten ruhenden Wälzkurve (p). Auch die Kurventangente kann in jedem Punkte angegeben werden, da sie mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt.

Das angegebene analytische Verfahren versagt, wenn die gegebene Wälzkurve nicht in mathematisch definierter Form, sondern als beliebig gestaltete Kurve vorgelegt ist. Wie man in diesem Falle die gesuchte Wälzkurve ermittelt, soll im folgenden gezeigt werden.

Die ruhende Wälzkurve (p) sei in beliebiger Gestalt gegeben. Von der bewegten Wälzkurve können wir für jede Lage des Ventilhubpunktes Ω unmittelbar den Fahrstrahl ϱ_p angeben, da $\varrho_p = x_p = \Omega P$ ist (Abb. 3). Um die zugeordnete Anomalie φ_p zu finden, bilden wir nach (5a) und (4)

$$\varphi_p = 180^0 - \vartheta = \int \frac{dy_p}{x_p} + c.$$

Ueber die Integrationskonstante c kann noch beliebig verfügt werden. Ist k eine beliebige andere Konstante, so kann man schreiben

$$\varphi_p = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2}{x_p}\, d\, y_p + c = \frac{1}{k^2}\int u\, d\, y_p + c,$$

wobei die Größen $u = \frac{k^2}{x_p}$ die Abszissen einer Kurve (q) sind, die die Ordinaten y_p der entsprechenden Punkte der gegebenen Kurve (p) besitzt. Die Abszissen u kann man entweder graphisch oder zahlenmäßig rechnerisch für jede Lage des Punktes Ω ermitteln und findet auf jeder Geraden ΩP einen Punkt Q der Kurve (q), indem man $\Omega Q = u$ macht (Abb. 5). Entspricht Ω_0 der tiefsten Ventilstellung, so ist die durch die Kurve (q) bestimmte, in Abb. 5 schraffierte Fläche $\Omega_0 Q_0\, Q\Omega$

$$f = \int_{\Omega_0}^{\Omega} u\, d\, y_p.$$

Daher wird

$$\varphi_p = \frac{f}{k^2}.$$

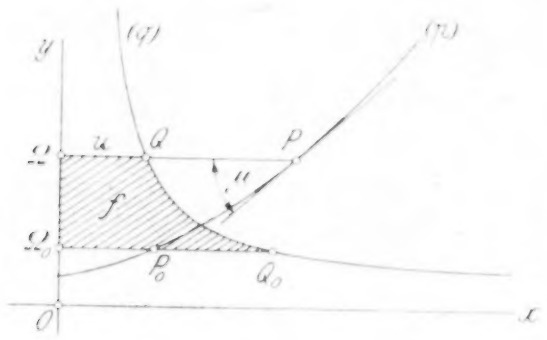


Abb. 5

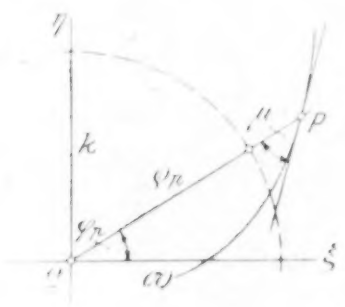


Abb. 6

Mit Hilfe dieser Beziehung erhält man für jede Lage des Punktes Ω den entsprechenden Winkel φ_p und, da $\varrho_p = x_p$ bereits bekannt ist, den entsprechenden Punkt P der bewegten Wälzkurve (π) (Abb. 6). Auch die Kurventangente ist bestimmt, da der Winkel μ zwischen Tangente und Fahrstrahl (Abb. 6) nach Abb. 5 als der Winkel zwischen ΩP und der Tangente an die ruhende Wälzkurve gefunden wird. Nach diesem Verfahren läßt sich zu jeder gegebenen ruhenden Wälzkurve (p) die entsprechende bewegte Wälzkurve (π) mit jedem gewünschten Grade von Genauigkeit ermitteln.

Ist dagegen umgekehrt die bewegte Wälzkurve (π) gegeben, so findet man die ruhende Wälzkurve (p) in der folgenden Weise. Zu jedem Punkte P der bewegten Wälzkurve (Abb. 6) kann man sofort die Abszisse x_p des entsprechenden Punktes der ruhenden Wälzkurve angeben, da $x_p = \varrho_p$ ist. Die zugehörige Ordinate wird nach (4) und (5 a)

$$y_p = b = \int \varrho_p\, d\, \varphi_p + \text{konst.}$$

Ist k wieder eine beliebige Konstante, so kann man schreiben

$$y_p = \frac{1}{k}\int \varrho_p\, d\,(k\,\varphi_p) + \text{konst.} = \frac{1}{k}\int \varrho_p\, du + \text{konst.},$$

wobei du das Bogenelement eines Kreises vom Radius k um Ω ist. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kreisbögen u aus Abb. 6 als Abszissen und die zugeordneten Strecken $\Omega P = \varrho_p = x_p$ als Ordinaten auf (Abb. 7), so erhält man eine Kurve, durch welche die in Abb. 7 schraffierte Fläche

$$f = \int \varrho_p\, du + \text{konst.} = k\, y_p$$

bestimmt ist. Aus Abb. 7 berechnet man, etwa durch Einteilen in schmale trapezförmige Streifen, die Fläche f und findet damit die entsprechende Ordinate $y_p = f : k$. Dieses Verfahren liefert zu jedem Punkte der bewegten Wälzkurve (π) den entsprechenden Punkt der ruhenden Wälzkurve (p). Die Kurventangente ergibt sich, wenn man die aus Abb. 5 und 6 ersichtliche Gleichheit der beiden Winkel μ benutzt.

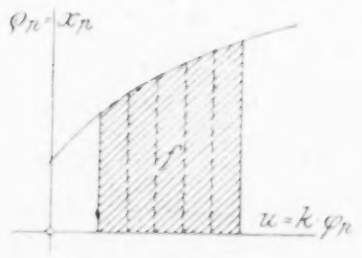


Abb. 7

3. Ein Punkt des bewegten Wälzhebels beschreibt einen gegebenen Kreis. Als wichtige Anwendungen dieser Mechanismen seien die Wälzhebelsteuerungen mit ruhenden Drehpunkten genannt, deren Schema in Abb. 8 angegeben ist. Bei ihnen beschreibt ein Punkt des einen Wälzhebels bei dessen Relativbewegung gegen den anderen einen Kreis; z. B. ist die Relativbahn des Punktes Ω ein Kreis um den Punkt O mit dem Radius $\Omega O = R$.

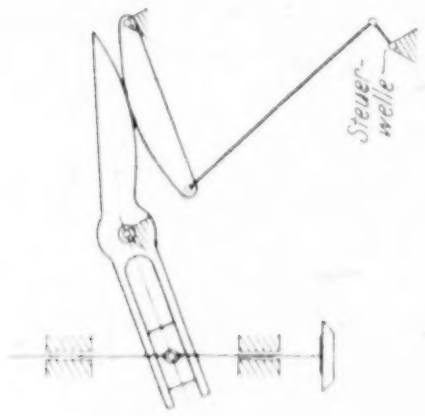


Abb. 8

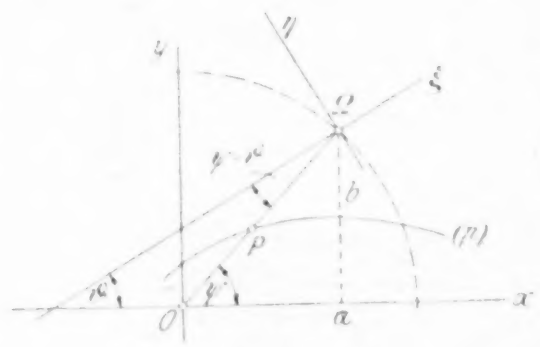


Abb. 9

Wir legen durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises ein ruhendes Koordinatensystem x, y und durch den Punkt Ω, dessen Koordinaten a, b seien, ein bewegtes Koordinatensystem ξ, η, dessen ξ-Achse mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt (Abb. 9). Ist ψ die Anomalie der jeweiligen Lage des Punktes Ω, so gilt

$$a = R\cos\psi, \quad b = R\sin\psi$$

und daher

$$\frac{da}{d\vartheta} = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\sin\psi, \qquad \frac{db}{d\vartheta} = R\frac{d\psi}{d\vartheta}\cos\psi.$$

Nach (2) und (3) ergeben sich nunmehr für die beiden Wälzkurven die Beziehungen

$$x_p = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right)\cos\psi, \qquad y_p = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right)\sin\psi$$

bezw.

$$\xi_p = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\cos(\psi - \vartheta), \qquad \eta_p = -R\frac{d\psi}{d\vartheta}\sin(\psi - \vartheta).$$

Hieraus folgt das bekannte Ergebnis, daß der augenblickliche Berührungspunkt P beider Wälzkurven immer auf der Geraden $O\Omega$ liegen muß und daß $\Omega P = \varrho_p = R\frac{d\psi}{d\vartheta}$ ist (Abb. 9). In Polarkoordinaten erhält man für die ruhende Wälzkurve

$$\left.\begin{aligned} r_p &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = R\left(1 - \frac{d\psi}{d\vartheta}\right) \\ &\text{Anomalie } \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und für die bewegte Wälzkurve

$$\varrho_p = \sqrt{\xi_p^2 + \eta_p^2} = R\frac{d\psi}{d\vartheta}, \qquad \text{Anomalie } 180^0 + \psi - \vartheta.$$

Die Handhabung des analytischen Verfahrens sei unmittelbar an einem Beispiel gezeigt, das für die Anwendungen wichtig ist, und zwar an dem Fall einer geradlinigen Wälzkurve (p). Gegeben sei als ruhende Wälzkurve (p) die Gerade parallel der x-Achse

$$r_p = \frac{h}{\sin\psi},$$

wobei $h < R$ angenommen werde, so daß $h = R\sin\alpha$ gesetzt werden kann (Abb. 10). Dann wird nach (8)

$$\vartheta = \int \frac{d\psi}{1 - \frac{h}{R\sin\psi}} + c = \int \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin\psi - \sin\alpha} + c.$$

Abb. 10

Die Integration ergibt

$$\vartheta = \psi + \tan\alpha\ \lg\frac{\sin\frac{\psi - \alpha}{2}}{\cos\frac{\psi + \alpha}{2}} + c,$$

so daß man als Anomalie der bewegten Wälzkurve

$$\varphi_p = 180^0 + \psi - \vartheta = \tan\alpha\ \lg\frac{\cos\frac{\psi + \alpha}{2}}{\sin\frac{\psi - \alpha}{2}} + c$$

erhält, wobei über die Integrationskonstante c willkürlich verfügt werden kann. Ferner wird

$$\varrho_p = R\frac{d\psi}{dt} = R - \frac{h}{\sin\psi} = R\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\sin\psi}\right).$$

Die beiden für φ_p und ϱ_p gefundenen Ausdrücke stellen die gesuchte bewegte Wälzkurve (π) in Parameterform mit dem Parameter ψ dar. Für verschiedene Werte ψ berechnet man hiernach die zugeordneten Größen φ_p und ϱ_p und erhält damit punktweise die bewegte Wälzkurve. Da der Winkel zwischen dem Fahrstrahl ϱ_p und der Kurventangente hier stets ψ ist, so kann man überall auch die Kurventangente angeben, so daß sich die Kurve (π) sehr genau zeichnen läßt. In Abb. 11 ist die für den Wert $\sin\alpha = 0{,}2$ ermittelte Wälzkurve (π) angegeben.

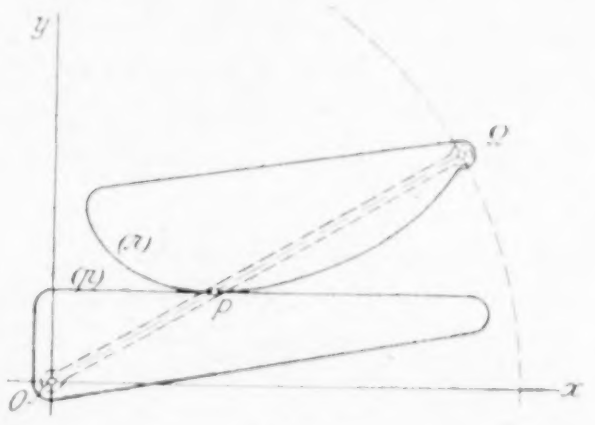


Abb. 11

Der analytische Weg ist nur anwendbar, wenn die Wälzkurve (p) durch ihre Gleichung gegeben ist. Ist sie dagegen nur als beliebig gezeichnete Kurve vorgelegt, kennt man also ihren mathematischen Charakter nicht, so muß man ähnlich vorgehen, wie im 2. Abschnitt gezeigt wurde. Das hier anzuwendende Verfahren soll jedoch erst im nächsten Abschnitt erörtert werden, wo es sich als Sonderfall eines allgemeineren Verfahrens ergibt.

4. Ein Punkt des bewegten Wälzhebels beschreibt eine beliebig gegebene Kurve. In welcher Weise der vorliegende Fall in den Anwendungen auftreten kann, zeigt der in Abb. 12 schematisch dargestellte Steuerungsmechanismus, bei dem der Punkt Ω des Wälzhebels 1 als Relativbahn gegen den Wälzhebel 2 weder eine Gerade noch einen Kreis, sondern eine beliebig gestaltete Kurve beschreibt, die sich ohne Kenntnis der Wälzkurven aufzeichnen läßt.

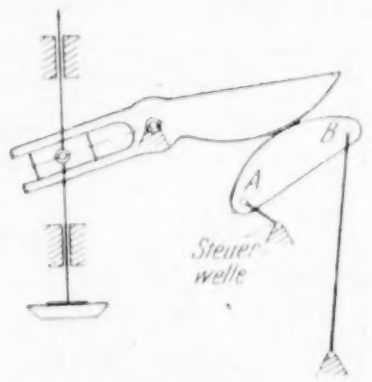


Abb. 12

Eine der beiden Wälzkurven sei wieder gegeben und diese werde als ruhende Wälzkurve (p) betrachtet. Ferner sei die Relativbahn (o) des Punktes Ω gegen die Wälzkurve (p) bekannt (Abb. 13). Wählt man auf (o) eine beliebige Lage des Punktes Ω und zieht in ihr die Bahnnormale (n), so schneidet diese die Kurve (p) im zugeordneten Punkte P, dem augenblicklichen Berührungspunkt beider Wälzkurven. Entsprechend den früheren Bezeichnungen sei

$$OP = r_p, \quad \Omega P = \varrho_p, \quad O\Omega = R \text{ (veränderlich)}.$$

Da der bewegte Wälzhebel eine Momentandrehung um den Punkt P mit dem Drehwinkel $d\vartheta$ ausführt, so ist das Bahnelement, das der Punkt Ω auf der Kurve (o) zurücklegt,

$$du = \varrho_p \cdot d\vartheta, \qquad \text{woraus } d\vartheta = \frac{du}{\varrho_p}$$

und nach Integration

$$\vartheta = \int\frac{du}{\varrho_p} + \text{konst.}$$

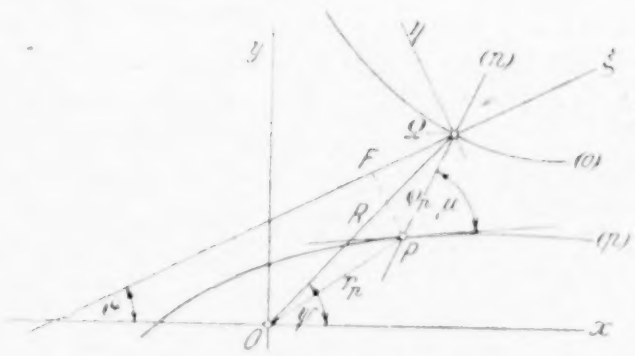


Abb. 13

folgt. Hiernach läßt sich der Winkel ϑ durch eine zeichnerisch rechnerische Integration in ähnlicher Weise ermitteln, wie es im 2. Abschnitte gezeigt wurde. Man wählt eine beliebige Konstante k und bildet

$$\vartheta = \frac{1}{k^2}\int\frac{k^2}{\varrho_p}\,du + \text{konst.} = \frac{1}{k^2}\int z\,du + \text{konst.} = \frac{f}{k^2} + \text{konst.}$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem trägt man die Bogenlänge u der Kurve (o) als Abszisse und die entsprechenden Strecken $z = k^2 : \varrho_p$ als Ordinaten auf. Man erhält dadurch eine Kurve, die eine Fläche f (Abb. 14) bestimmt, aus der sich nach der obigen Beziehung der Winkel ϑ berechnen läßt. Hat man ϑ

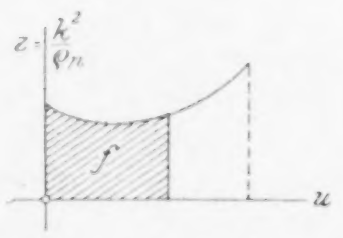


Abb 14

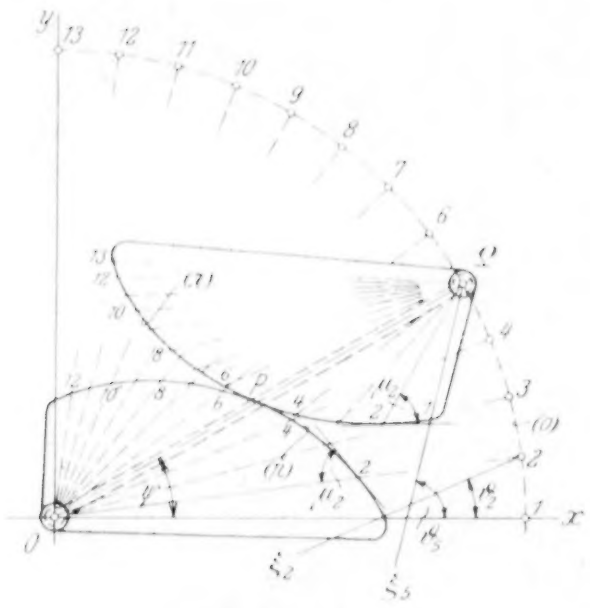


Abb. 15

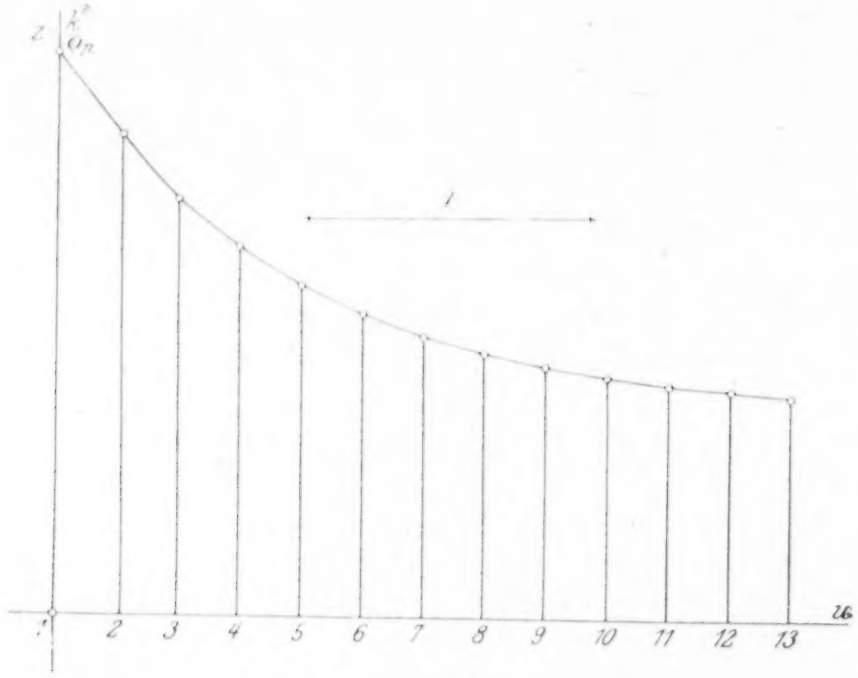


Abb. 15a

ermittelt, so zieht man durch Ω unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse eine Gerade, welche die ξ-Achse des bewegten Koordinatensystems darstellt. Fällt man von P auf die ξ-Achse das Lot PF, so ist $\Omega F = \xi_p$ und $PF = \eta_p$. Damit ist ein Punkt der bewegten Wälzkurve (π) gefunden und zwar derjenige, der der angenommenen Lage des Punktes Ω entspricht. Wiederholt man dieses Verfahren für verschiedene Lagen des Punktes Ω, so erhält man punktweise die bewegte Wälzkurve (π). Auch die Kurventangente läßt sich in jedem Punkte angeben, da aus Abb. 13 der Winkel μ zwischen dem Fahrstrahl ϱ_p und der Kurventangente entnommen werden kann.

Ist im besonderen Falle die Bahnkurve (o) des Punktes Ω ein Kreis um einen Punkt O, so erhalten wir den im 3. Abschnitt analytisch behandelten Fall, an dem hier die Durchführung des zeichnerisch rechnerischen Verfahrens gezeigt werden soll. Gegeben ist der Bahnkreis (o) des Punktes Ω mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R sowie die als ruhend betrachtete Wälzkurve (p) (Abb. 15). Die bewegte Wälzkurve (π) soll für den Bereich von $\psi = 0$ bis $\psi = 90^0$ ermittelt werden. Wir teilen das diesem Bereich entsprechende Viertel des Bahnkreises (o) in eine Anzahl (z. B. 12) gleiche Teile und verbinden die Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkte O. Auf (p) erhalten wir dadurch die entsprechenden Punkte P. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 15a) tragen wir auf der Abszissenachse vom Ursprung aus die 12 gleichen Teilbögen des Kreises o auf. Dann wählen wir eine beliebige Strecke k, entnehmen aus Abb. 15 die Strecken $\varrho_p = \Omega P$ und berechnen (z. B. mit Hilfe des Rechenschiebers) die Größen $z = k^2 : \varrho_p$, die wir in Abb. 15a in den entsprechenden Punkten als Ordinaten auftragen. Auf diese Weise erhalten wir eine Kurve, durch die die Fläche f bestimmt ist. Diese Fläche wird durch die eingezeichneten Ordinaten in Streifen zerlegt, die als Trapeze berechnet werden. Die hierbei auftretenden kleinen Fehler lassen sich beseitigen, wenn man die Gesamtfläche mit Hilfe des Planimeters ermittelt und die für die Flächenstreifen berechneten Werte entsprechend korrigiert. Bezeichnet man in Abb. 15a den Inhalt der einzelnen Flächenstreifen vom Ursprung aus beginnend der Reihe nach mit $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{12}$, so ergeben sich, wenn man die Integrationskonstante gleich Null setzt, die entsprechenden Winkel

$$\vartheta_1 = f_1 : k^3, \quad \vartheta_2 = (f_1 + f_2) : k^2 \ldots, \quad \vartheta_{12} = (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{12}) : k^2$$

und zwar zahlenmäßig im Bogenmaß, so daß sie sich als Bogenlängen eines Kreises von 10 cm Radius unmittelbar auftragen lassen. In Abb. 15 sind die Winkel ϑ_2 und ϑ_5 für die Punkte 2 bezw. 5 eingetragen, die die entsprechenden Abszissenachsen ξ_2 bezw. ξ_5 bestimmen. Die bewegte Wälzkurve (π) wurde für die Stellung 5 eingezeichnet. Um z. B. den Punkt 2 der bewegten Wälzkurve zu finden, fällen wir vom Punkte 2 der Kurve (p) auf ξ das Lot und finden damit die Koordinaten ξ_{p2} und η_{p2}, die wir in Ω_5 auf ξ_5 bezw. dazu senkrecht auftragen und die dadurch den Punkt 2 der bewegten Wälzkurve ergeben. Durch den Winkel μ_2 zwischen Tangente und Fahrstrahl der Kurve (p) ist auch die Tangente im Punkte 2 der Kurve (π) bestimmt. Hat man durch wiederholte Anwendung des angegebenen Verfahrens die bewegte Wälzkurve (π) punktweise ermittelt, so muß sich als Kontrolle zeigen, daß die Bogenlängen der Wälzkurven (p) und (π) zwischen je zwei entsprechenden Punkten einander gleich sind. 112

Über die Korrelationsmethode.

Von **P. RIEBESELL** in Hamburg.

In dieser Zeitschrift (1, 1921, S. 199—205) hat Hr. Gravelius einige Untersuchungen veröffentlicht, die insofern einer Ergänzung bedürfen, als die darin zur Geltung gebrachten Gesichtspunkte für die Theorie des Korrelationskoeffizienten in der mathematischen Statistik zum Teil bereits seit langem Beachtung gefunden haben. In den folgenden Zeilen soll der Zusammenhang zwischen der Darstellung des Hrn. Gravelius und der üblichen Auffassung kurz erläutert werden.

1. Der Korrelationskoeffizient. Läßt sich aus einer Reihe von Beobachtungen ein eindeutiges Gesetz, das die Abhängigkeit der einen Veränderlichen von der andern in der Form $y = f(x)$ angibt, nicht ableiten, so kann die Korrelationsmethode dazu dienen, Wahrscheinlichkeitswerte für die Abhängigkeit der beiden Veränderlichen voneinander zu geben. Man verfährt dann in der Weise, daß man die Beobachtungswerte in eine statistische Verteilungstafel einträgt und den sogenannten Korrelationskoeffizienten berechnet.

Um die Methode zu kennzeichnen, diene als Beispiel die Prüfung der Korrelation zwischen der Veranlagung zum arithmetischen und der zum geometrischen Denken bei einer Gruppe von n Schülern. Die Noten seien für jedes Fach von der mittleren aus mit 0, $\pm$ 1, 2, 3 und 4, die eine Eigenschaft (arithmetische Veranlagung) sei mit x, die andere (geometrische Veranlagung) mit y bezeichnet. Wird jeder Schüler in das entsprechende Feld der Verteilungstafel mit doppeltem Eingang x, y gesetzt, so möge sich folgendes Bild ergeben:

y \ x	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	
−4	1									1
−3	1	3	1			1				6
−2	1	5	7	3						16
−1	1	2	11	21	10	2	1			48
0		1	4	14	22	9	2			52
+1	1		1	5	9	10	6		1	33
+2			1	1	5	7	2	1		17
+3							3			3
+4							1	1		2
	5	11	25	44	46	29	15	2	1	178

x

Zunächst werden für die beiden Summenreihen (unten und rechts) die arithmetischen Mittel gebildet, $x_0 = -0{,}44$ und $y_0 = -0{,}10$. Werden die Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit α_x und α_y bezeichnet, so sind die beiden Streuungen

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma \alpha_x^2}{n}} = 1{,}521 \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma \alpha_y^2}{n}} = 1{,}383.$$

Damit berechnet sich der Korrelationskoeffizient zu:

$$r = \frac{\Sigma \alpha_x \alpha_y}{n \sigma_x \sigma_y} = 0{,}64 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Was bedeutet nun dieser Korrelationskoeffizient und wie ist man zu ihm gekommen?

2. Die Regressionskoeffizienten. Wenn überhaupt keine Beziehung zwischen den beiden Eigenschaften x und y bestände, so müßten in der obigen Tafel die untereinander stehenden Horizontalreihen vollständig unabhängig voneinander sein, insbesondere müßten sie ihr Maximum immer annähernd an derselben Stelle haben. Dasselbe gilt von den Vertikalreihen. An dem obigen Beispiel ist aber ohne weiteres zu sehen, daß mit größer werdendem y auch der Mittelwert der x sich nach rechts verschiebt; die

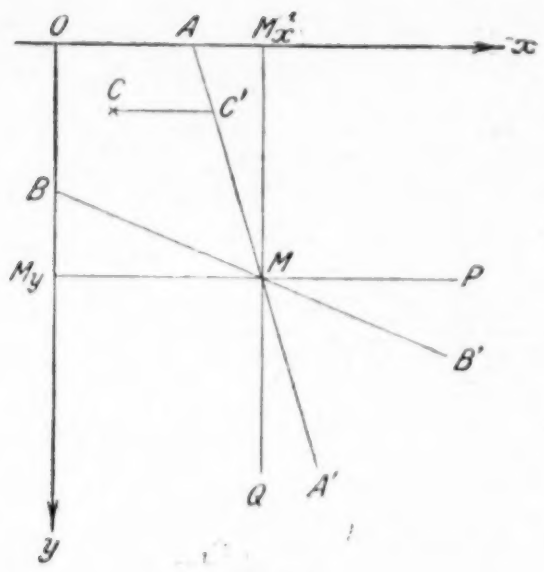


Abb. 1

Gipfelwerte der Horizontalreihenkurven verschieben sich nach rechts unten, ebenso steht es mit den Vertikalreihenkurven.

Am einfachsten liegt der Fall, wenn die Mittelwerte der Horizontalreihen auf einer Geraden liegen. In Abb. 1 soll diese Gerade durch AA' gegeben sein. Ist M_y der Mittelwert der y und schneidet die Gerade M_yP die Gerade AA' in M, dann schneidet die Senkrechte QM die Achse Ox in M_x, wo M_x der Mittelwert der x ist. Denn, wenn der Tangens des Neigungswinkels von AA' gegen MM_x mit R_y bezeichnet wird, so gilt für jede Horizontalreihe, in der die Zahl der Beobachtungen n_y sein möge, $\Sigma x = n_y R_y y$ und daher für die ganze Verteilungstafel, weil $\Sigma(n_y y) = 0$ ist, $\Sigma x = R_y \Sigma(n_y y) = 0$. M ist demnach die Mitte der gesamten Verteilung.

Es läßt sich nun R_y auf einfache Weise bestimmen. Werden die x und die y von M aus gezählt, so ist das mittlere Produkt aller Paare zugehöriger Abweichungen

$$p = \frac{\Sigma(xy)}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für jede Reihe ist $\Sigma(xy) = y\,\Sigma x = n_y R_y y^2$. Für die ganze Tafel ist daher:

$$\Sigma(xy) = R_y\,\Sigma(n_y y^2) = n R_y \sigma_y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Da $p = r\sigma_x\sigma_y$ ist, so ergibt sich:

$$R_y = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ebenso würde, wenn BB' die Verbindungslinie der Mitten der Vertikalreihen wäre,

$$R_x = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

sein. Die R werden als Regressionskoeffizienten bezeichnet. Während also der Korrelationskoeffizient keine unmittelbare geometrische Bedeutung hat (für $r = 0$ besteht keine Korrelation, für $r > 0$ ist positive Korrelation, für $r < 0$ negative Korrelation vorhanden), so geben die Regressionskoeffizienten an, um wieviel die x bezw. y fortschreiten, wenn y bezw. x um eine Einheit vermehrt wird. Für das obige Beispiel ergibt sich $R_y = 0{,}71$.

Haben wir es mit einer nichtlinearen Regression zu tun, so gibt R_y (bezw. R_x) den Richtungsfaktor derjenigen Geraden an, deren Entfernungen von den Mitten der Horizontalreihen (auf den Horizontalreihen gemessen) das kleinste Abweichungsquadrat haben. Dies ist sofort aus folgender Betrachtung zu ersehen: Ist C ein Punkt, der nicht auf AA' liegt, so ist $CC' = x - R_y y$. Es muß also $\Sigma(x - R_y y)^2$ ein Minimum sein; d. h. es muß

$$\Sigma(x - R_y y)\,y = 0, \qquad R_y = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sein.

Der Korrelationskoeffizient r ist nun nicht, wie Gravelius meint, früher willkürlich definiert worden. Schon in der Arbeit von Bravais[1]), in der er zuerst auftritt und nach der er auch Bravaisscher Korrelationskoeffizient heißt, wird seine Beziehung zur Fehlertheorie abgeleitet. Es handelt sich bei Bravais noch nicht um Korrelationsrechnung, hier wird vielmehr die Wahrscheinlichkeit berechnet, daß ein mit Beobachtungsfehlern behafteter Punkt auf einer Geraden liegt. Die Regressionskoeffizienten sind von Galton[2]) in die Korrelationsrechnung eingeführt und namentlich von Pearson[3]) angewandt worden. Später sind diese Methoden besonders in der biologischen[4]) und psychologischen[5]) Variationsstatistik ausgebaut. Die von Gravelius gegebene Ableitung findet sich z. B. bei Yule[6]).

[1]) A. Bravais, Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Mémoires de l'Academie des Sciences, 2. série, t. 9, 1846, p. 255.

[2]) F. Galton, Family Likeness in Stature. Proc. Roy. Soc. Vol. 40, 1886, p. 135.

[3]) K. Pearson, Regression, Heredity and Panmixia. Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 187, 1896, p. 277.

[4]) Vgl. z. B. W. Johannsen, Elemente der exakten Erblichkeitslehre, 2. Aufl., Jena 1913.

[5]) Vgl. z. B. W. Betz, Ueber Korrelation, Beiheft zur Ztschr. für angew. Psychologie. Leipzig 1911.

[6]) G. Yule, An Introduction to the Theory of Statistics, 5. Edition, London 1917.

Da sich auch die weiteren Betrachtungen von Gravelius aus den Grundlagen der mathematischen Statistik auf einfache Weise ableiten lassen, seien hier noch einige Bemerkungen angeschlossen.

3. Das Korrelationsverhältnis. Aus der Gleichung (6) ergibt sich, daß

$$s_x = \sqrt{\Sigma (x - R_y y)^2 : n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

die Streuung der $(x - R_y y)$ ist, d. h. s_x ist der mittlere Fehler, der gemacht wird, wenn die x von den y aus entsprechend der Relation $x = R_y y$ abgeschätzt werden. Für s_x ergibt sich aber aus den Gleichungen (2), (4) und (6)

$$s_x = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Entsprechend wird

$$s_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

s_x ist also die mittlere Streuung der Horizontalreihen in bezug auf die Linie AA' und s_y die mittlere Streuung der Vertikalreihen in bezug auf BB'.

Da nach Gleichung (4) und (5)

$$r = \sqrt{R_x R_y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

so kann r auch als die mittlere Neigung der beiden Geraden, oder die Neigung bei einheitlichem Streuungsmaß, angesehen werden. Herrscht vollständige Korrelation, so wird $R_x = R_y$ und $r = 1$.

Liegt keine lineare Regression vor, so ist es wichtig, ein Maß für die Abweichung von der Geradlinigkeit zu haben. Dieses wird gegeben durch das Pearsonsche Korrelationsverhältnis, das folgendermaßen definiert wird. Ist s_{ax} die Streuung einer Horizontalreihe, so ist die mittlere Streuung der Horizontalreihen gegeben durch

$$\sigma_{ax}^2 = \Sigma (n_y s_{ax}^2) : n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Jetzt soll r' entsprechend Gleichung (8) definiert sein durch

$$\sigma_{ax}^2 = \sigma_x^2 (1 - r'^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

sodaß

$$r'^2 = 1 - \frac{\sigma_{ax}^2}{\sigma_x^2}.$$

Ist M_x das Mittel aller x und m_x das Mittel einer Horizontalreihe, so ist

$$n \sigma_x^2 = \Sigma n_y (s_{ax}^2 + [M_x - m_x]^2)$$

und, wenn die Streuung der m_x mit σ_{mx} bezeichnet wird, so ergibt sich

$$\sigma_x^2 = \sigma_{ax}^2 + \sigma_{mx}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und daher

$$r' = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Dabei wird $r'^2 - r^2$ ein Maß für die Abweichung von der Geradlinigkeit; denn, wenn d die Abweichung der Mitte einer Horizontalreihe von der Regressionslinie bezeichnet, so ist $\sigma_x^2 (1 - r^2) = \sigma_{ax}^2 + \sigma_d^2$, daher $\sigma_d^2 = \sigma_x^2 (r'^2 - r^2)$.

4. Rangkorrelationen. Sind die beiden Merkmale x und y nicht gemessen, sondern nur in Rangsystemen geordnet worden, so kommen jeder Beobachtung zwei Zahlen der Reihe 1 bis n zu, und zwar kommt jede der Zahlen sowohl in der x-Reihe wie in der y Reihe nur einmal vor. Dann ist die Streuung der x und der y die der n ersten ganzen Zahlen, d. h.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}},$$

und es wird

$$r = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{2\Sigma x^2 - \Sigma x^2 + 2\Sigma xy - \Sigma y^2}{2\Sigma x^2} = 1 - \frac{\Sigma (x-y)^2}{2\Sigma x^2} = 1 - \frac{6\Sigma (x-y)^2}{n(n^2-1)}.$$

Diese Formel stammt von Spearman.

5. Mehrfache Korrelationen. Eine Ausdehnung der bisherigen Methode auf 3 und mehr Veränderliche läßt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Wir bilden wieder lineare Gleichungen und bestimmen die Konstanten so, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Haben wir n Variable x_1 bis x_n und werden die Regressionskoeffizienten von x_1 zu x_2 mit $b_{12,34\ldots n}$, von x_1 zu x_3 mit $b_{13,24\ldots n}$ usw. bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$x_1 = b_{12,34\ldots n} x_2 + b_{13,24\ldots n} x_3 + \ldots\ldots + b_{1n,23\ldots n-1} x_n.$$

Eine Verallgemeinerung der Gleichungen (10), (4) und (8) führt dann sofort zu den Beziehungen:

$$r_{12,34\ldots n} = \sqrt{b_{12,34\ldots n}\, b_{21,34\ldots n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

$$b_{12,34\ldots n} = r_{12,34\ldots n}\,\frac{\sigma_{1,34\ldots n}}{\sigma_{2,34\ldots n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

$$\sigma^2_{1,23\ldots n} = \sigma_1{}^2\,(1-r_{12}{}^2)\,(1-r^2_{13,2})\,(1-r^2_{14,23})\ldots\ldots(1-r^2_{1n,23\ldots n-1}) \quad (17),$$

$$r_{12,n} = \frac{r_{12}-r_{1n}\,r_{2n}}{\sqrt{(1-r^2_{1n})\,(1-r^2_{2n})}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

6. Korrelation bei normalen Verteilungskurven. Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn die Horizontal- und Vertikalreihen nach Gaußschen Fehlerkurven streuen. Wir erhalten dann die normale Verteilungsfläche, deren Gestalt von der Korrelation abhängt.

Gelten für x_1 und x_2 die Verteilungen

$$z_1 = \frac{n_1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma_1\, e^{-\frac{x_1{}^2}{2\sigma_1{}^2}}, \qquad z_2 = \frac{n_2}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma_2\, e^{-\frac{x_2{}^2}{2\sigma_2{}^2}},$$

so ist bei völliger Unabhängigkeit der Merkmale x_1 und x_2 die Verteilung gegeben durch

$$z_{12} = \frac{n}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2}\, e^{-1/2\left(\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_2{}^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Diese Gestalt erhält die Verteilungsfläche für $r = 0$.

Legen wir durch die Fläche in verschiedenen Höhen Schnitte, so sind die Schnittkurven gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_2{}^2} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Wir erhalten also eine Schar von einander ähnlichen Ellipsen, deren Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen und proportional den Streuungen sind. Für $\sigma_1 = \sigma_2$ ergeben sich Kreise. Die Fläche ist dann die Rotationsfläche der Gaußschen Fehlerkurve.

Besteht Korrelation zwischen x_1 und x_2, so sind

$$x_{12} = x_1 - b_{12}\,x_2 \quad \text{und} \quad x_{21} = x_2 - b_{21}\,x_1$$

voneinander unabhängig und wir erhalten als Verteilungsfläche

$$z_{12} = \frac{n}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sqrt{(1-r_{12}{}^2)}}\, e^{-1/2\left(\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_{21}{}^2}{\sigma_{21}{}^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

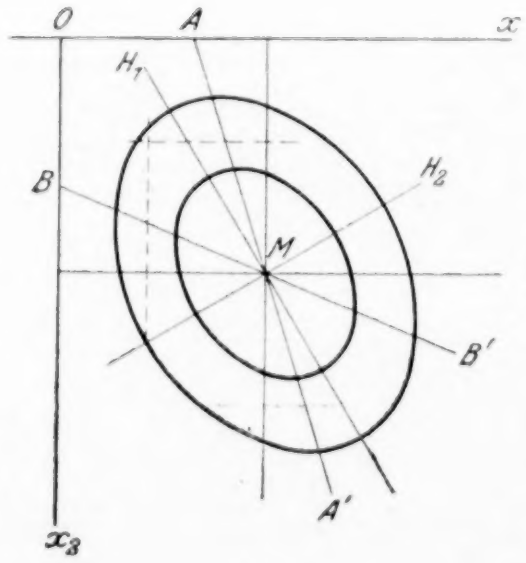


Abb. 2

Es ist aber

$$\frac{x_1{}^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{x_{21}{}^2}{\sigma_{21}{}^2} = \frac{x_1{}^2}{\sigma_{12}{}^2}+\frac{x_2{}^2}{\sigma_{21}{}^2}-2\,r_{12}\,\frac{x_1\,x_2}{\sigma_{12}\,\sigma_{21}}.$$

Wir erhalten also wieder eine Schar konzentrischer ähnlicher Ellipsen, deren Hauptachsen aber gegen die Koordinatenachsen gedreht sind. Abb. 2 möge diese Verhältnisse veranschaulichen. Der Drehungswinkel der Achsen ergibt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,r_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Die Regressionslinien $A\,A'$ und $B\,B'$ müssen immer durch die Mitten aller Horizontal- bezw. Vertikallinien hindurchgehen. Diese Untersuchungen lassen sich leicht auf n Variable verallgemeinern [1]). 117

[1]) Vgl. auch H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906, S. 119 ff.

* * *

Der vorstehende Aufsatz ist durch die Schriftleitung Hrn. C. Gravelius zur Kenntnis gebracht worden, der sich hierzu wie folgt äußert:

Die Ausführungen des Hrn. Riebesell wird man gewiß mit Interesse zur Kenntnis nehmen. Im wesentlichen wiederholen sie meine Darlegungen Bd. 1, S. 199 ff. unter Zugrundelegung eines anderen Ausgangsbeispiels, das freilich auch einem ganz anderen Interessenbereich angehört, als der ist, auf den es mir ausdrücklich ankam.

Mir kam und kommt es darauf an, die Korrelationsmethode, deren Anwendung in den beobachtenden Naturwissenschaften — vornehmlich der Hydrographie und Klimatologie — ich für fördernd halte, den in Betracht kommenden Kreisen leicht zugängig zu machen. Dies war umsomehr geboten, als die Methode, wie ich aus zahlreichen einzelnen Mitteilungen weiß, auch bei uns schon sehr häufig angewendet worden wäre, wenn man über ihre Grundlegung hinreichend unterrichtet gewesen wäre. Das ist aber nicht nur bei uns nicht der Fall gewesen[1]). Es darf daran erinnert werden, daß Exner in einer kleinen bei G. Fischer (Jena) erschienenen Broschüre[2]) bei dem Hinweis darauf, daß einer Beziehungsgleichung $y = b_1 x$ die Umkehrung $x = b_2 y$ mit $b_1 b_2 = r^2$ zugehört, sich dahin ausdrückt, es sei in der Korrelationsmethode anders als in »der gewöhnlichen Analysis«. Solche Unklarheiten haben nicht anregend wirken können; sie sind namentlich auch in Ingenieurkreisen, wo man in Fragen der Psychotechnik gern von der Methode Gebrauch gemacht hätte, als ein recht lästiges Hemmnis empfunden worden. Wahrnehmungen dieser Art haben mich veranlaßt, im Anfang 1920 in der mathematischen Sektion der »Isis« zu Dresden einen Vortrag über den Gegenstand zu halten, um dessen Veröffentlichung ich dann gebeten wurde.

Dem mathematischen Statistiker war dabei naturgemäß nichts Neues zu sagen. Dagegen wurden dem Ingenieur und Naturwissenschaftler durch die Herleitung in der Tat neue Gesichtspunkte eröffnet. Denn wenn zwischen zwei Reihen X und Y ohne den Durchgang durch die Tafel der verbundenen Häufigkeiten (Verteilungstafel), also, um auch einmal den Ausdruck zu gebrauchen, mit der »gewöhnlichen Analysis« z. B. eine lineare Beziehung hergeleitet wurde, so ergab sich eben nur eine Gleichung. Da ist es denn freilich für den, der mit der ganzen Betrachtung zum ersten Male bekannt gemacht wird, eine ganz neue und sehr wesentliche Einsicht, daß tatsächlich zwei Beziehungsgleichungen[3]) bestehen, um so mehr als in Fragen der Praxis, so z. B. in der hydrographischen Prognose, die Umkehrung $x = b_2 y$ neben $y = b_1 x$ eine sehr wesentliche Rolle spielen kann.

Die Begrenzung, welche ich meiner Darstellung gegeben habe, halte ich auch jetzt noch für richtig und zweckmäßig, weil es sich eben nur um eine erste Orientierung über die Praxis der Methode handelt.

Ergänzungen gebe ich in einem der nächsten Hefte der Zeitschrift für Gewässerkunde in Anlehnung an eine spezielle hydrographische Untersuchung. Man darf die besondere Stellung der mehrfach genannten Wissenschaften zur Korrelationsmethode nicht übersehen. Sie hat hier vornehmlich den Wert einer exakten Sondierung. Mit ihrem Ergebnis, abgesehen von dem Fall eines kleinen σ ist, eine Untersuchung noch nicht abgeschlossen, vielmehr erwächst dann die Aufgabe, eine physikalische Begründung des als wahrscheinlich erkannten Zusammenhanges zu suchen. Wird dabei ein Erfolg erreicht, so wird nicht immer an der linearen Beziehungsform festgehalten werden können. Und damit entsteht dann das interessante Problem, ob und wie die bei Anwendung der Korrelationsmethoden durchgeführten Rechnungen und erhaltenen Zahlen unmittelbar bei Herleitung einer neuen erweiterten Beziehungsform verwendbar sind. Den Nachweis hierüber habe ich in der vorhin angezeigten Arbeit erbracht.

Gravelius. 117a

---

[1]) Man vergleiche in dieser Hinsicht etwa die ausgezeichnete Schrift von V. H. Ryd, Bidrag til bestemmelsen af Meteorologiske Elementers periodes. Kopenhagen 1915, wo (S. 43) der Korrelationskoeffizient auf seine Formel, als zweckmäßig und einfach gestaltetes Aggregat, angesehen wird.

[2]) Die Korrelationsmethode, 1912.

[3]) Die Bezeichnung »Regressionsgleichungen« wird man für naturwissenschaftlich-technische Beträge ablehnen müssen; Beziehungen zwischen Niederschlag und Meereshöhe, zwischen der Wassermenge der Konstituante eines Flußsystems usw. sind keine »Regressionen«.

Über die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$.

Von **P. SCHREIBER** in Dresden.

In seiner Behandlung der graphischen Methoden beim gewöhnlichen Zahlenrechnen, der Auflösung von Gleichungen, der Differentiation und Integration usw. führt R Mehmke[1]) auch die Darstellung der Funktionen durch »logarithmische Bilder« ein, erwähnt aber mit keinem Wort die Logarithmenpapiere, die er nach Pirani[2]) der Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland) als ein für alle derartige Arbeiten wichtiges Hilfsmittel zur Herstellung empfohlen hatte. Nachdem es mir gelungen war, die in Mehmkes Anleitungen gestellten Aufgaben (auch die Gleichungen auf den Seiten 53 und 59) mit Hilfe der Logarithmenpapiere zu lösen[3]), habe ich dies auch mit der Integration der folgenden, ganz willkürlich angenommenen Differentialgleichung versucht.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{2\sqrt[2]{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[5]{x}}.$$

Das Integral sei $y = F(x, k)$, wo k die Integrationskonstante. Um das numerische Bild dieser Funktion zu konstruieren, führt man $u = my$ und $v = nx$ Millimeter als Koordinaten ein. Dann wird

$$u = my = mF\left(\frac{v}{n}, k\right) = F_1(v, k)$$

die Gleichung der Schar von Integralkurven sein. Weiter erhält man

$$Z = \frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\beta = \frac{m}{n}\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}f(x, y),$$

worin β der Winkel ist, den die im Punkte u, v an eine Integralkurve gelegte Tangente mit der X-Achse bildet, α aber den gleichartigen Winkel bei $m = n$ bedeutet. In diesem letzteren Falle kann man von der Normalform der Integralkurven sprechen. Sind m und n verschieden, so können diese Kurven wesentlich verschiedenes Aussehen haben. Die Funktion $Z = \frac{m}{n}f(x, y) = \operatorname{tg}\beta$ hat man zuerst durch Z-Gleicher, welche auch β-Gleicher[4]) genannt werden können, in der Y-X-Ebene darzustellen. Man zieht dann in einer genügenden Anzahl von Punkten eines jeden dieser Gleicher die Tangentenstücke mit den zugehörigen Winkeln β und legt in diese eine Reihe von Integralkurven.

Zur Konstruktion des logarithmischen Bildes der Funktion $y = F(x,k)$ setzt man

$$u = Mb \log y \quad \text{und} \quad v = Mb \log x,$$

worin Mb »die Länge eines Mantissenbereiches« in Millimetern bedeutet, die ich »eine Manteb«[5]) nenne. Man kann aber die Manteb als Längeneinheit betrachten und dann

$$u = \log y \qquad v = \log x$$

---

[1]) R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig 1917.

[2]) M. Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, S. 53, Sammlung Göschen, 1919.

[3]) In der kleinen Schrift: »Anleitungen zum praktischen Zahlenrechnen mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel«, welche als Heft 2 der »Grundzüge einer Flächennomographie« bei Fr. Vieweg & Sohn in Braunschweig 1922 erschienen ist, habe ich gezeigt, wie alle die Aufgaben, die Mehmke im ersten Abschnitt seines Leitfadens behandelt hat, unter Hinzunahme der angenäherten Integration sich in sehr einfacher Weise mit Hilfe der Potenzpapiere und der Produktentafel lösen lassen. Ich betrachte dieses Werk als eine Ergänzungsschrift zu Mehmkes Leitfaden für alle diejenigen, die keine oder nur geringe Kenntnis der darstellenden Geometrie haben. Der vorliegende Aufsatz ist der erste Schritt meiner Bestrebungen, auch die Differentialgleichungen in dieser Weise zu behandeln.

[4]) Vergl. Mehmke, Leitfaden S. 118. Die dort erwähnten Worte wie Isoklinen, Isogonen, sowie das vielfach verwendete Wort »Isoplethen« läßt sich recht gut durch »der Gleicher« ersetzen. Das von anderer Seite in der Met. Zeitschrift vorgeschlagene Wort »die Gleiche« erscheint mir weniger zweckmäßig.

[5]) Ich erhebe abermals Widerspruch dagegen, daß diese Zahl als Modul bezeichnet wird. In der Logarithmenrechnung denkt man bei diesem Wort zuerst an $\log e$. Ferner gibt es so vielerlei Moduln, daß man nicht noch mehr schaffen sollte.

Mantebs schreiben. Dann ist

$$u = \log F_2(v, k) = F_3(v, k)$$

die Gleichung der logarithmischen Bilder der Integralkurven und erhält man weiter

$$Z = \frac{du}{dv} = \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}f(x, y)$$

Die Konstruktion der Integralkurven geschieht dann genau so wie beim numerischen Bild. In unserem Beispiel ist also

$$Z = \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sqrt[2]{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[5]{x}}\,\frac{x}{y} = \frac{Z_1}{Z_3}Z_2.$$

Der erste Schritt besteht darin, die Gleichung

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad \text{oder} \quad \log Z = \log Z_1 + \log Z_2 - \log Z_3$$

in der XZ-Ebene durch y-Gleicher darzustellen. Das logarithmische Bild der Z-Funktion wird also aus einer Schar von Linien bestehen und es wird längs einer derartigen Linie y einen konstanten Wert haben. Ich habe zur Ableitung dieser Linien nach und nach $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ und 10 angenommen.

Die numerische Auswertung der Funktionen

$$Z = 2y^{1/2} \qquad Z = 3x^{1/3} \qquad Z = 4y^{1/4} \qquad \text{und} \qquad Z = 5x^{1/5}$$

erfordert die Herstellung einer Rechentafel, Abb. 1. Diese beginnt mit dem Ziehen der Richtlinien für die Potenzen $Z = x^q$ oder y^q.

Die Darstellung der Abb. 1 erfolgte auf dem Potenzpapier mit einer Manteb 250 mm (Marke $375^1/_2$ *L T*). An beiden Seiten des Netzfeldes befinden sich Doppelskalen. Auf der inneren Seite ist die Manteb logarithmisch geteilt (Numerusseite), auf der äußeren

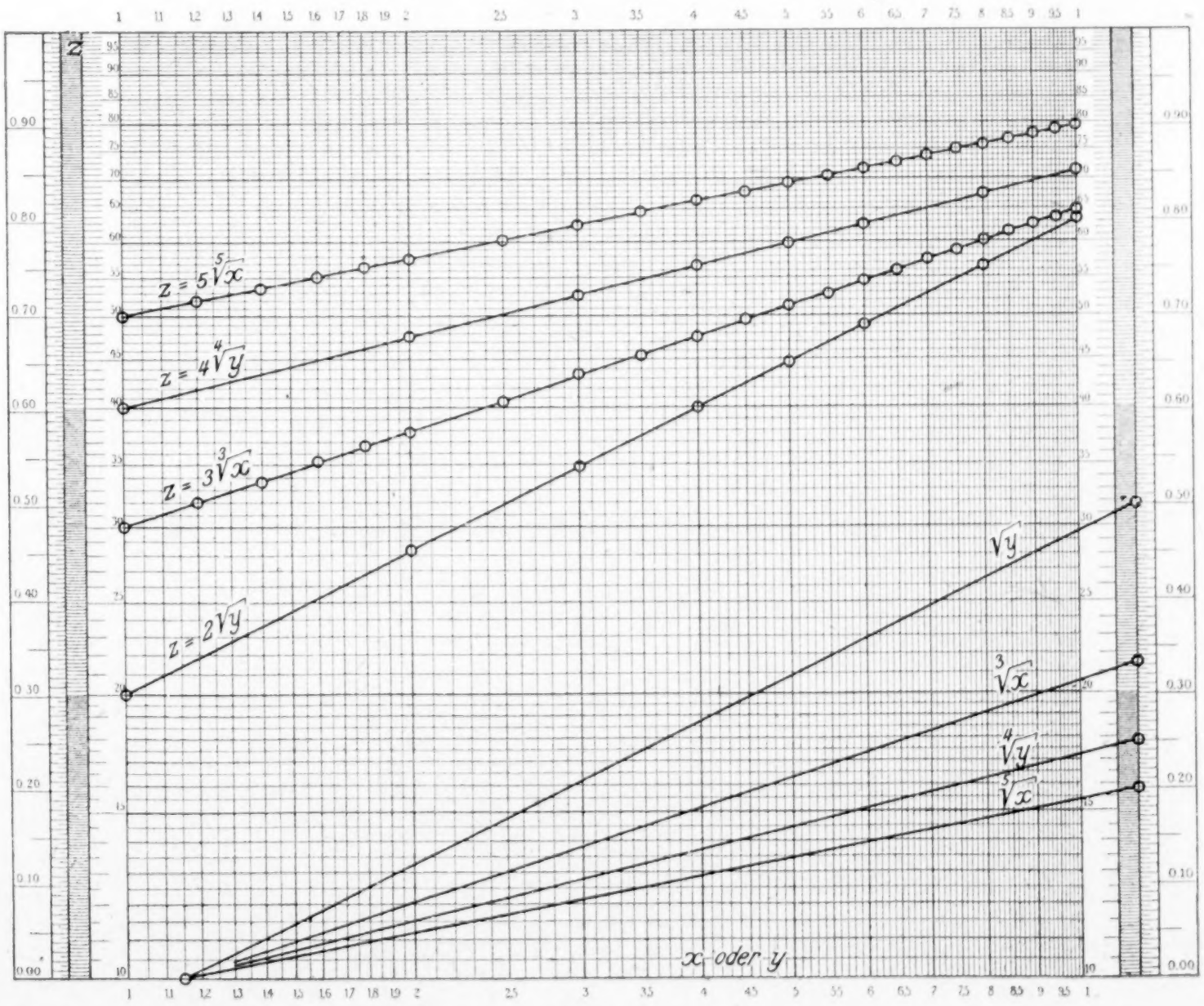


Abb. 1

gleichmäßig (Logarithmusseite). Beide Funktionsskalen zusammen stellen eine graphische Logarithmentafel vor, nach innen findet man den Numerus, nach außen den Logarithmus; die Ablesung ist fast auf 3 Dezimalen sicher. Die Logarithmusseite der Doppelskala rechts läßt die Exponenten q in der Gleichung $Z = x^q$ abgreifen, so lange $q < 1$ ist. Zieht man von einem Punkt im unteren Rand, welcher von der Skala um 1 Manteb absteht, Gerade nach den Punkten $q = {}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_4$ und ${}^1/_5$, so sind diese die Richtlinien der Potenzfunktionen. Ist $q = 1$, so stellt die Diagonale des Feldes die Richtlinie für $Z = x^1$ vor. Ist $q > 1$, so lehrt die Formel $x = Z^{1/q}$, daß man an der Logarithmusseite der Doppelskala $1 : q$ abzugreifen und am oberen Rand von der linken Ecke nach rechts abzutragen und dann eine Gerade von diesem Punkt nach der linken unteren Ecke des Feldes zu ziehen hat. Diese Erläuterungen werden für die Leser dieser Zeitschrift genügen. Es ist nur noch zu erwähnen, daß aus $Z = x^q$ $\frac{du}{dv} = q = \operatorname{tg} \gamma$ folgt.

Zieht man durch den mit $Z = 2$ bezifferten Punkt der Ordinatenachse eine Parallele zur Richtlinie $\sqrt{y}$, so stellt diese Gerade das logarithmische Bild der Funktion $Z = 2\sqrt{y}$ vor. Auf gleiche Weise erhält man die logarithmischen Bilder der 3 anderen Z-Funktionen.

Wenn man dann in Abb. 1 die Koordinaten der durch Kreise bezeichneten Punkte abliest, so kann man auf leicht ersichtliche Weise die Koordinaten der Funktionen

$$Z_1 = 2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x} \quad \text{und} \quad Z_3 = 4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[2]{x}$$

ableiten. Das Ergebnis dieser Rechnungen wurde in der nachstehenden Zahlentafel zusammengestellt. Die Zahlen sind die Koordinaten der y-Gleicher dieser Funktionen Z_1 und Z_2, wobei angenommen wurde, daß die Wahl $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ und 10 ausreichen würde.

$y =$	1		2		3		4		5		6		8		10	
x	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3	Z_1	Z_3
1,0	5,00	9,00	5,82	9,77	6,48	10,27	6,99	10,67	7,47	11,00	7,90	11,28	8,66	11,74	9,32	12,11
1,2	5,20	9,19	6,02	9,96	6,68	10,46	7,19	10,86	7,67	11,19	8,10	11,47	8,86	11,93	9,52	12,30
1,4	5,37	9,35	6,19	10,12	6,85	10,62	7,36	11,02	7,84	11,35	8,27	11,63	9,03	12,09	9,69	12,46
1,6	5,51	9,50	6,33	10,27	6,99	10,77	7,50	11,17	7,98	11,50	8,41	11,78	9,17	12,24	9,83	12,61
1,8	5,67	9,64	6,49	10,41	7,15	10,91	7,66	11,31	8,14	11,64	8,57	11,92	9,33	12,38	9,99	12,75
2,0	5,79	9,77	6,61	10,54	7,27	11,04	7,78	11,44	8,26	11,77	8,69	12,05	9,45	12,51	10,11	12,88
2,5	6,06	10,00	6,88	10,77	7,54	11,27	8,05	11,67	8,53	12,00	8,96	12,28	9,72	12,74	10,38	13,11
3,0	6,33	10,25	7,15	11,02	7,81	11,52	8,32	11,92	8,80	12,25	9,23	12,53	9,99	12,99	10,65	13,36
3,5	6,53	10,44	7,35	11,21	8,01	11,71	8,52	12,11	9,00	12,44	9,43	12,72	10,19	13,18	10,85	13,55
4,0	6,77	10,61	7,59	11,38	8,25	11,88	8,76	12,28	9,24	12,61	9,67	12,89	10,43	13,35	11,09	13,72
4,5	6,95	10,79	7,77	11,56	8,43	12,06	8,94	12,46	9,42	12,79	9,85	13,07	10,61	13,53	11,27	13,90
5,0	7,11	10,92	7,93	11,69	8,59	12,19	9,10	12,59	9,58	12,92	10,01	13,20	10,77	13,66	11,43	14,03
5,5	7,30	11,04	8,12	11,81	8,78	12,31	9,29	12,71	9,77	13,04	10,20	13,32	10,96	13,78	11,62	14,15
6,0	7,44	11,18	8,26	11,95	8,92	12,45	9,43	12,85	9,91	13,18	10,34	13,46	11,10	13,92	11,76	14,29
6,5	7,60	11,29	8,42	12,06	9,08	12,56	9,59	12,96	10,07	13,29	10,50	13,57	11,26	14,03	11,92	14,40
7,0	7,73	11,40	8,55	12,17	9,21	12,67	9,72	13,07	10,20	13,40	10,63	13,68	11,39	14,14	12,05	14,51
7,5	7,88	11 50	8,70	12,27	9,36	12,77	9,87	13,17	10,35	13,50	10,78	13,78	11,54	14,24	12,20	14,61
8,0	8,00	11,60	8,82	12 37	9,48	12 87	9,99	13,27	10,47	13,60	10,90	13,88	11,66	14,34	12,32	14,71
8,5	8,13	11,69	8,95	12,46	9,61	12,96	10,12	13,36	10,60	13,69	11,03	13,97	11,79	14,43	12,45	14,80
9,0	8,27	11,78	9,09	12,55	9,75	13,05	10,26	13,45	10,74	13,78	11,17	14 06	11,93	14,52	12,59	14,89
9,5	8,38	11,87	9,20	12,64	9,86	13,14	10,37	13,54	10,85	13,87	11,28	14,15	12,04	14,61	12,70	14,98
10,0	8,48	11,96	9,30	12,73	9,96	13,23	10,47	13,63	10,95	13,96	11,38	14,24	12,14	14,70	12,80	15,07

Die Konstruktion des y-Gleichers für $y = 5$ wurde in Abb. 2 dargestellt. Die Gleichung des logarithmischen Bildes desselben ist $u = \log Z = \log Z_1 + \log Z_2 - \log Z_3 = u_1 + u_2 - u_3$. Das ganze Verfahren ist außerordentlich einfach, wenn man Potenzpapiere verwendet, welche mehrere Mantissenfelder enthalten. Hier wurde aber die ganze Darstellung in nur einem Feld vorgenommen.

Ich nehme an, daß die Koordinaten in Abb. 2 $u = \log Z$ und $v = \log x$ für Z und x zwischen 1,00 bis 10,00 liegen und bezeichne diese mit ζ und ξ. Dann wird man $Z = 10^{\varrho}\,\zeta$ und $x = 10^{\sigma}\,\xi$ schreiben können, worin ϱ und σ ganze, positive oder negative Exponenten bedeuten.

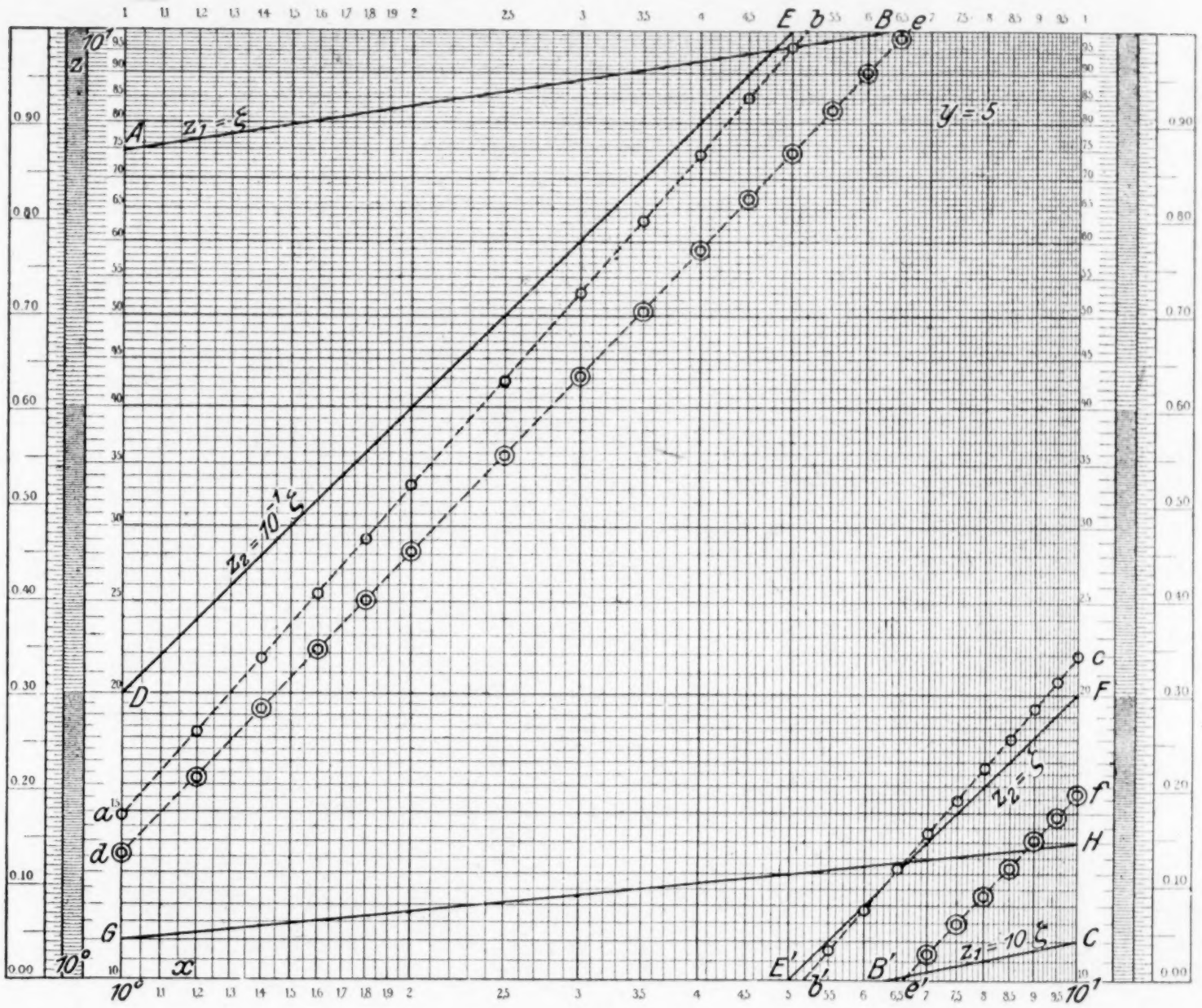


Abb. 2

Die Kurve ABC ist das log. Bild der Funktion Z_1. Aus der Zahlentafel ersieht man, daß die Z_1-Werte für $y = 5$ zwischen 7,47 und 10,95 liegen. Bei $x = 6{,}25$ wird $Z_1 = 10$, die Kurve tritt in das darüber liegende Feld. Die Fortsetzung $B'C$ wurde eine Mantob tiefer gelegt; es wird dann aber $Z_1 = 10^1\zeta$. Die Funktion $Z_2 = x : y = 0{,}2\,x$ stellt die unter 45^0 gegen beide Achsen geneigte Gerade DEF dar. Auch diese besteht aus zwei Teilen; es ist in der Strecke DE $Z = 10^{-1}\zeta$, in der Strecke $E'F$ aber $Z = \zeta$.

In der wenig von einer Geraden abweichenden Kurve GH, welche die Funktion Z_3 darstellt, ist $Z = 10\,\zeta$, da deren Z-Werte nach der Zahlentafel zwischen 11,00 und 13,96 liegen. Die graphische Addition der Ordinaten u_1 und u_2 ergibt die durch einfache Kreise bezeichneten Punkte in der Kurve abc. Auch diese besteht aus zwei Zweigen. In der Strecke ab ist $Z = \zeta$, in der Strecke $b'c$ ist aber $Z = 10\,\zeta$.

Durch graphische Subtraktion der u_3 Ordinaten wurde die Z-Kurve def erhalten; die durch die Konstruktion gefundenen Werte in derselben sind durch Doppelkreise kenntlich gemacht worden. In der Strecke de ist $Z = 10^{-1}\zeta$, in $e'f$ aber $Z = \zeta$.

In meiner kürzlich erschienenen Flächennomographie [1]) habe ich die Konstruktion der logarithmischen Bilder von Funktionen der Form

$$y = (\alpha + \beta f_1(x))^p (\beta + \gamma f_2(x))^q (\delta + \varepsilon f_3(x))^r \ldots .$$

eingehend durch mehrere Beispiele behandelt. Ich habe dabei Wert auf die Darstellung in möglichst wenigen Mantissenfeldern gelegt und auf die Kunstgriffe hingewiesen, die man anwenden kann, wobei ich hier besonders auf die Abb. 8, 9, 10, 11 und 17 aufmerksam mache. Noch ausführlicher werden alle diese Funktionsdarstellungen in den unter [3]) bereits erwähnten Anleitungen, die mehr den Charakter eines Lehrbuches haben, behandelt.

---

[1]) Paul Schreiber: »Grundzüge einer Flächennomographie gegründet auf graphische Darstellungen in Funktionspapieren mit gleichmäßiger und logarithmischer Teilung. Mit 19 Abbildungen. Braunschweig, 1921.

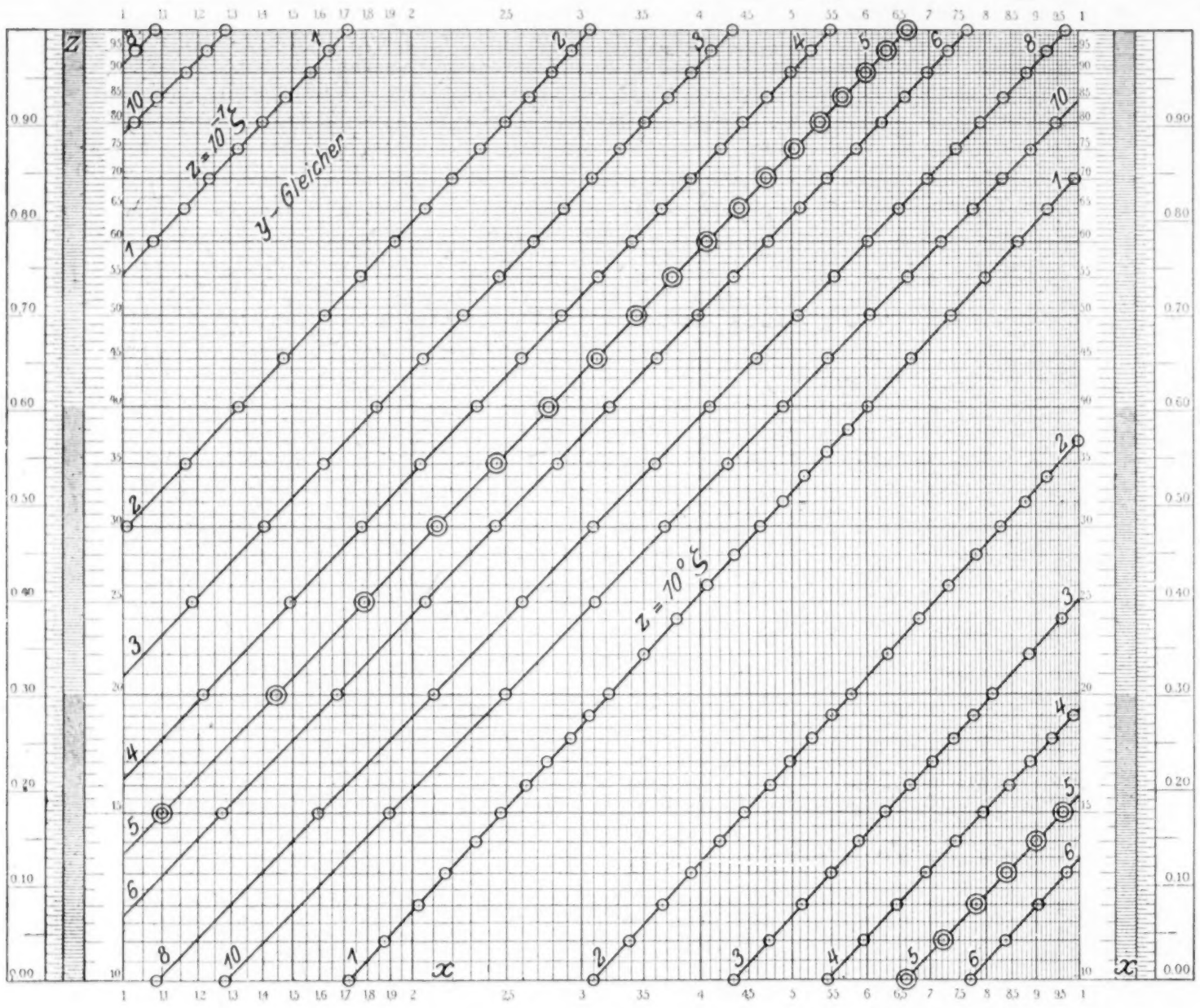


Abb. 3

Der y-Gleicher für $y = 5$, welcher so in Abb. 2 abgeleitet worden war, wurde nun auf ein anderes Feld in Abb. 3 übertragen, wie dies in dieser aus der Linie mit den Doppelkreisen zu ersehen ist.

Auf gleiche Weise wurden die y-Gleicher für die anderen angenommenen y-Werte konstruiert und in Abb. 3 eingetragen.

Man ersieht aus Abb. 2 übrigens, daß die wenigen Linien nach dem Uebertrag in Abb. 3 weggewischt werden können, also dasselbe Blatt mehrmals Verwendung finden kann.

Die Abb. 3 ist das logarithmische Bild der Funktion

$$Z = \frac{2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[2]{x}} \cdot \frac{x}{y}$$

dargestellt durch y-Gleicher.

Bei den zwei Linien links oben für $y = 8$ und 10 ist $Z = 10^{-2}\zeta$, in der mittleren Schar $Z = 10^{-1}\zeta$ und der Schar rechts unten $Z = 10^{0}\zeta$.

Die Konstruktion der Integralkurven erfordert aber die Darstellung derselben Funktion durch Z-Gleicher, die man auch, da $Z = \operatorname{tg}\gamma$ ist, γ-Gleicher nennen kann.

Der zweite Schritt besteht also in der Konstruktion der γ-Gleicher; hierzu wurden die Koordinaten der in Abb. 3 durch Ringe kenntlich gemachten Schnitte der y-Gleicher mit bestimmt angenommenen Werten von Z abgelesen und in Abb. 4 eingetragen. In dieser sind die Ordinaten $u = \log y$ und $v = \log x$. Man sieht, daß die längs der Ordinate $y = 5$ in Abb. 4 eingetragenen Doppelkreise dieselben Abszissen haben, als die Doppelkreise längs des $y = 5$-Gleichers in Abb. 3. Diese Z-Gleicher oder γ-Gleicher weichen so wenig von geraden Linien ab, daß die an manchen Stellen nötigen Extrapolationen genügend genau durch Verlängerung der Geraden vorgenommen werden konnten. Die Linienschar in Abb. 4 bezieht sich auf die Werte $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}1$ bis $\operatorname{tg}\gamma = 7{,}0$.

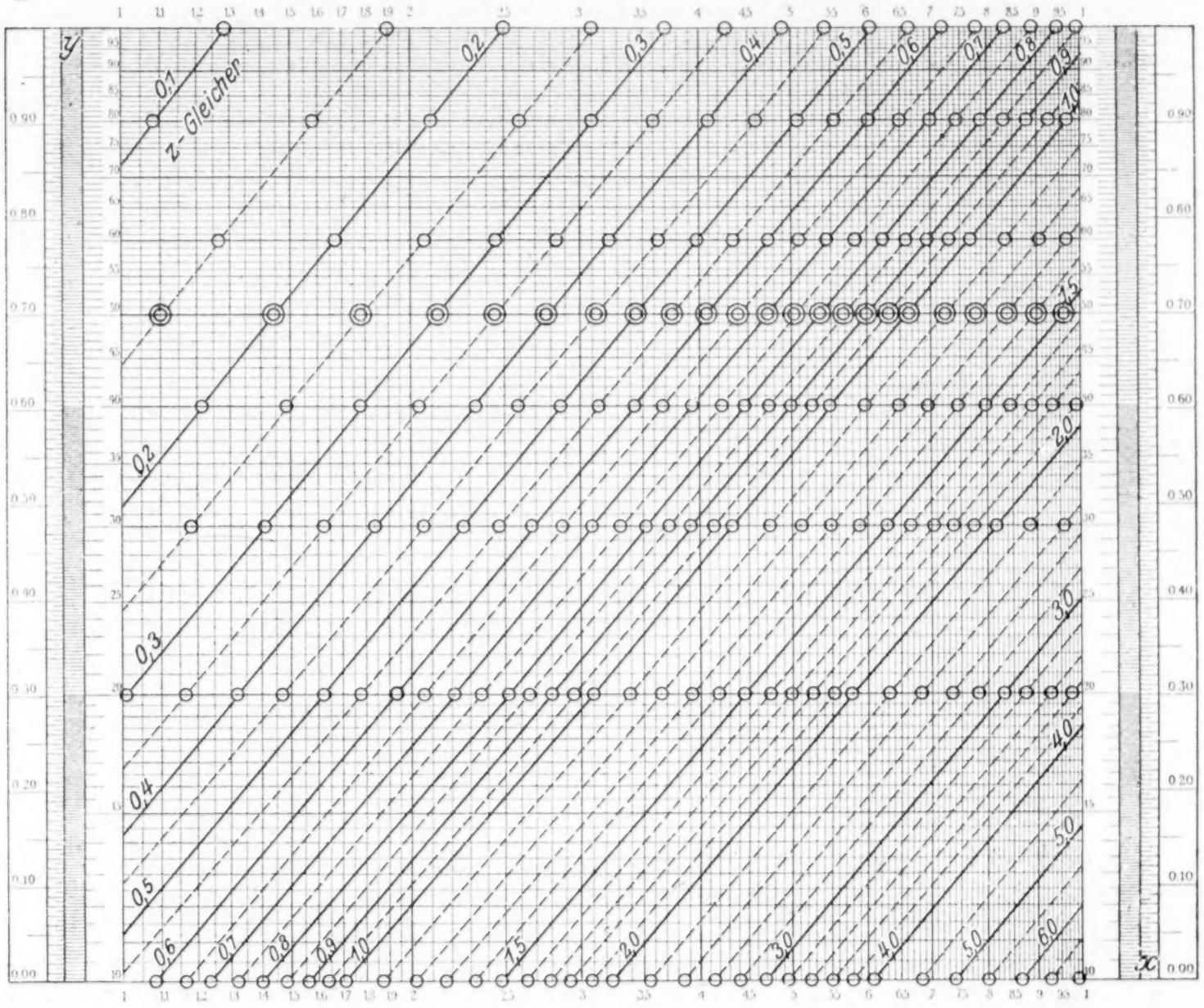


Abb. 4

Nunmehr konnten in Abb. 5 die Winkel γ eingezeichnet und danach die Integralkurven konstruiert werden.

Für $x = 1$ ergibt Abb. 3

$y =$	1	2	3	4	6	8
$q = \operatorname{tg}\gamma =$	0,554	0,297	0,207	0,163	0,117	0,092

Diese Werte wurden an der Logarithmusseite der rechten Randskala abgestochen und durch die 6 Ringe längs der Grenzlinie zwischen beiden Skalen angedeutet. So erhält man die Richtungslinien für x^q wie in Abb. 1 und durch Parallele zu diesen durch die Punkte $y = 1, 2, 3, 4, 6$ und 8 in der Ordinatenachse die Richtungen der Tangenten an die Integralkurven.

Für $x = 10$ bekommt man aber aus Abb. 3

$y =$	1	2	3	4	6	8
$q = \operatorname{tg}\gamma =$	7,09	3,70	2,51	1,93	1,34	1,03
$\frac{1}{q} = \operatorname{cotg}\gamma =$	0,141	0,270	0,398	0,518	0,746	0,971

Die Längen $\operatorname{cotg}\gamma$ wurden an der linken Randskala durch Doppelringe angegeben, trägt man sie am oberen Rand von links nach rechts ab, so erhält man die Richtlinien für die Tangenten an die Integralkurven, welche am rechten Rand durch die Punkte $y = 1, 2, 3, 4, 6$ und 8 gehen.

In das Feld wurden nur die γ-Gleicher für $\gamma = 0{,}10,\ 0{,}15,\ 0{,}20,\ 0{,}25,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8,\ 0{,}9,\ 1{,}0$ und $1{,}1$ eingetragen, da diese auszureichen schienen.

In jedem Gleicher wurden soviel Tangentenstücke mit den betreffenden γ-Winkeln ebenso gezogen, wie die Richtlinien in Abb. 1. Die q-Längen sind durch Ringe in der rechten Doppelskala der Abb. 5 kenntlich gemacht worden.

Die Gleicher selbst waren nur durch Bleistift angegeben worden, sie wurden nach dem Einzeichnen der Tangentenstücke weggewischt.

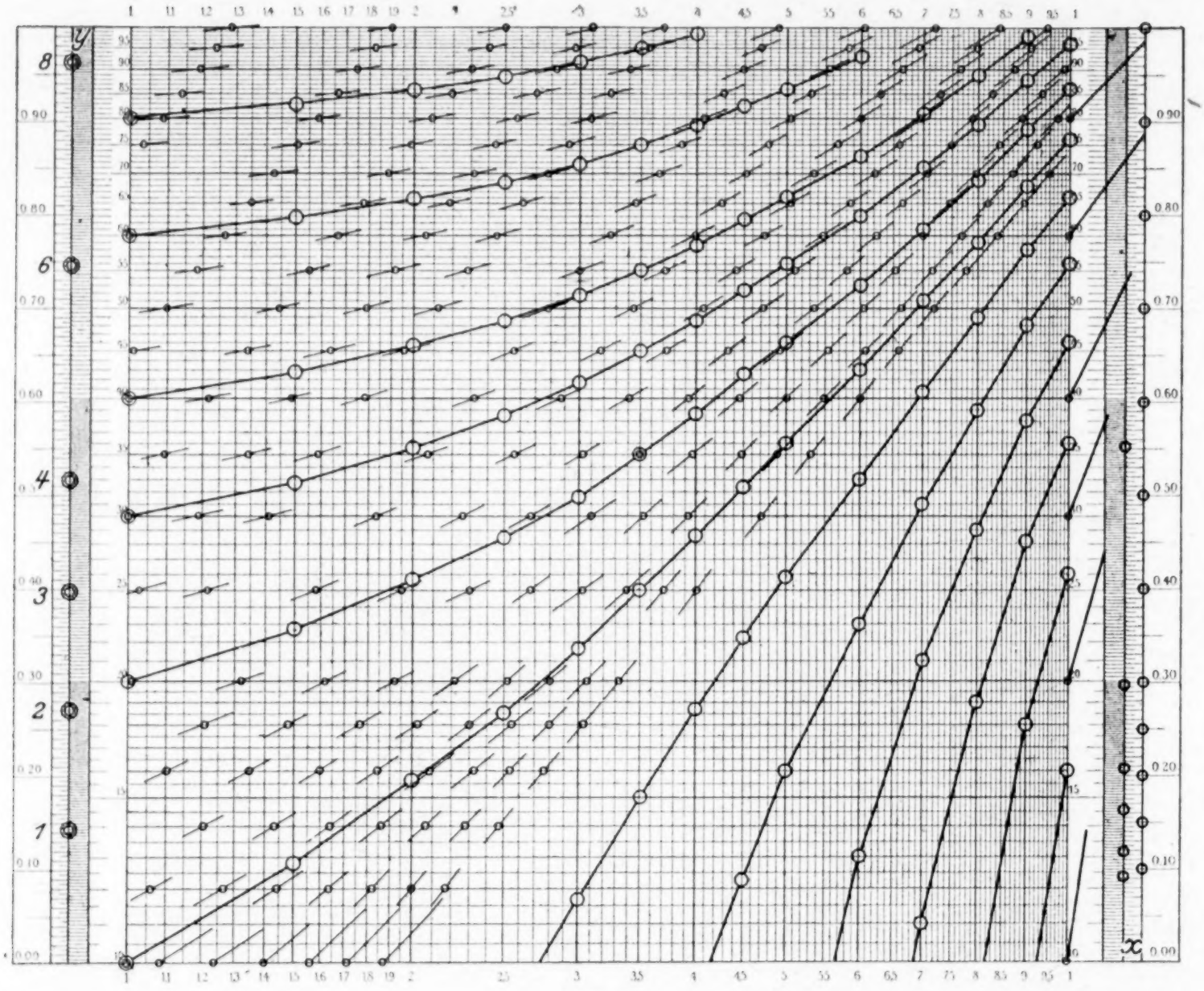


Abb. 5

Es wurde nun die von $x = y = 1$ ausgehende Integralkurve konstruiert und konnte an dieser abgelesen werden

$x =$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$y =$	1,00	1,28	1,56	1,85	2,17	2,50	2,86	3,22	3,60	4,30	5,10	5,90	6,80	7,60

Durch Addition von 1, 2, 3, 5 und 7 zu diesen y-Werten erhält man die Koordinaten der von den Punkten $y = 2$, 3, 4, 6 und 8 der Ordinatenachse ausgehenden Integralkurven. Die Einzeichnung derselben in das System der Tangentenstücke ergab befriedigende Anpassung der Integralkurven an die Tangenten. Man kann dieses Verfahren fortsetzen und würde dadurch die Integralkurven in den darüberliegenden Mantissenfeldern erhalten. Es wurden aber auch an den Ordinaten y der konstruierten Integralkurve die Konstanten -1, -2 bis -6 angebracht, wodurch die rechts unten liegenden Kurven erhalten wurden. Die Fortsetzung dieser Kurven nach dem negativen Gebiet der y hin stößt in den logarithmischen Bildern aber auf Schwierigkeiten, da zwischen $y = +1$ bis $y = -1$ unendlich viel Mantissenfelder eingeschaltet werden müssen. Ueber alle diese Fragen wird das unter [3]) erwähnte Werk eingehende Auskunft geben.

Zusatz. Wenn die Differentialgleichung in der allgemeinen Form $0 = f(x, y, y')$ gegeben ist, so kann man

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{du}{dv}\frac{y}{x} = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} Z$$

einführen und erhält dann eine andere Form $0 = F(x, y, Z)$.

γ ist der Winkel, den eine an das logarithmische Bild einer Integralkurve im Punkte u, v gelegte Tangente mit der X-Achse bildet. Man hat nun zu versuchen, die F-Funktion durch x-, y- oder Z-Gleicher darzustellen. Im letzteren Fall kann man in passend gewählten Stellen, wie in Abb. 5, die Richtungen der Tangenten einzeichnen und danach die Integralkurven konstruieren. In den anderen Fällen erhält man loga-

rithmische Bilder wie in Abb. 3 und muß daraus, wie in Abb. 4, die Darstellung durch Z-Gleicher ableiten.

Von besonderer Wichtigkeit ist der einfachste Fall $y' = f(x)$, aus dem man $y = \int f(x)\,dx + C$ in sehr vielen Fällen analytisch herleiten kann, aber sehr oft sehr unhandliche Formeln für die Integralkurven erhält. Man erhält aber auch

$$Z = \operatorname{tg}\gamma = \frac{x\,f(x)}{y} \quad \text{oder} \quad y = x\,f(x)\,Z^{-1}$$

und kann dann das logarithmische Bild der Funktion $y = x\,f(x)$ für $Z = 1$ konstruieren. Die logarithmischen Bilder für andere Werte von Z erhält man durch Parallelverschiebung dieser Kurve. Das ergibt also die Darstellung der Funktion $y = x\,f(x)\,Z^{-1}$ durch Z-Gleicher. Es lassen sich dann in diesem logarithmischen Bild die Tangenten einzeichnen und nach diesen die Integralkurven konstruieren.

In den beiden erwähnten Heften der Flächennomographie habe ich die Darstellung der folgenden Formen, welche $x\,(f)\,x$ annehmen können, gelehrt. Als einfachste Form erscheint

$$y = [ax^q + bx^r + cx^s + \ldots]^p,$$

in der die Vorzahlen, wie Exponenten alle beliebigen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können. Liegen mehrere derartiger Funktionen vor, so lassen sich daraus auch

$$y = \pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \quad \text{und} \quad y = y_1\,y_2\,y_3$$

rein graphisch konstruieren.

Treten Exponentialfunktionen auf, so wird man oft die Einfach Logarithmenpapiere oder Exponentialpapiere mit Vorteil verwenden können. Diese sind zur Darstellung der Funktionen $\log y = f(x)$ bestimmt, als gerade Linien erscheinen in ihnen die Funktionen $y = a e^{bx}$. Die Bilder der $f(x)$ in diesen Papieren wird man als halblogarithmische zu bezeichnen haben, es wird stets möglich sein, aus ihnen ganz logarithmische Bilder abzuleiten.

Potenz- und Exponentialpapiere hat die Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinland) in verschiedenen Ausführungen vorrätig, wie man aus deren »Verzeichnis der Liniennetzpapiere« ersehen kann. Für die graphische Integration ist besonders wichtig, daß die Potenzpapiere auch auf Pauspapier gedruckt erhalten werden können. Diese Firma bearbeitet jetzt auch nach meinen Angaben einen Satz von Potenzpapieren, in denen die trigonometrischen Funktionen in Anwendung kommen; ein Verzeichnis derselben kann erst nach der Fertigstellung herausgegeben werden. Das gibt den Logarithmenpapieren eine ungeahnte Verwendungsmöglichkeit, sie werden wohl das wichtigste Hilfsmittel bei der Zahlenrechnung sein. 119

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Der Segelflug und die Rhön-Segelflug-Wettbewerbe.

Von **W. HOFF** in Berlin-Adlershof.

Otto Lilienthal war es, der zum erstenmal die Grundlehren des Fliegens aufgedeckt und in wissenschaftlich faßbare Gestalt gebracht hat. Leider wurde seine Forschertätigkeit durch seinen todbringenden Absturz am 9. August 1896 jäh abgebrochen. Die deutsche Wissenschaft hatte im vergangenen Jahr Gelegenheit, anläßlich der 25. Wiederkehr des Todestages ihres bahnbrechenden Forschers ehrend zu gedenken.

Das Ausland hat die Arbeiten Lilienthals aufgegriffen und gefördert. Es vergingen viele Jahre, ehe sie in Deutschland wiederum Fuß faßten. Wir wollen hier die Arbeiten auf dem Gebiete des Motorflugwesens aus der Betrachtung lassen und uns nur mit dem motorlosen Fliegen beschäftigen, das in den letzten beiden Jahren durch die

Rhön-Wettbewerbe wiederum[1]) an Wichtigkeit gewonnen hat und dem wir auf Grund der Ergebnisse dieser Wettbewerbe gute Zukunft voraussagen dürfen.

Der erste Gleit- und Segelflugwettbewerb, der 1920 in der Rhön veranstaltet wurde, hat schon schöne Leistungen gezeitigt. Klemperer, der einen in vielen Einzelheiten neuartigen Eindecker geflogen hatte, wurde erster Sieger mit den Höchstleistungen: 1830 m Flugstrecke und 142,6 Sekunden Flugdauer. Im vergangenen Jahre wurden diese Leistungen beim zweiten Rhön Segelflug-Wettbewerb sowie durch unmittelbar nach dessen Abschluß vollführte Flüge bedeutend überboten. Am Schlusse dieses Aufsatzes wird hiervon kurz berichtet werden.

Im folgenden wird im Anschluß an die bisherigen Veröffentlichungen dargelegt, welche physikalischen Gesetze dem Segelflug zugrunde liegen, und es wird ihre bisherige Anwendung insbesondere bei den Rhön-Wettbewerben erläutert.

Als Segelflug ist jeder Flug zu verstehen, der die zum Schweben notwendige Leistung nicht durch mitgeführte Kraftmaschinen erzeugt, sondern den Energiequellen des Windes, in dem der Flug ausgeführt wird, entnimmt. Nach v. Kármán[2]) können wir den »statischen« Segelflug bei aufsteigenden Luftströmungen, in denen das Flugzeug sich dauernd im Gleitflug befindet, und den »dynamischen« Segelflug, bei dem das Flugzeug bei im Mittelwert wagerechter Windrichtung fliegt, unterscheiden.

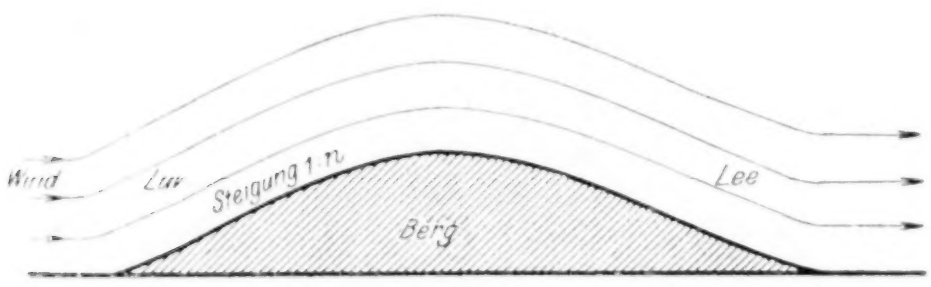


Abb. 1

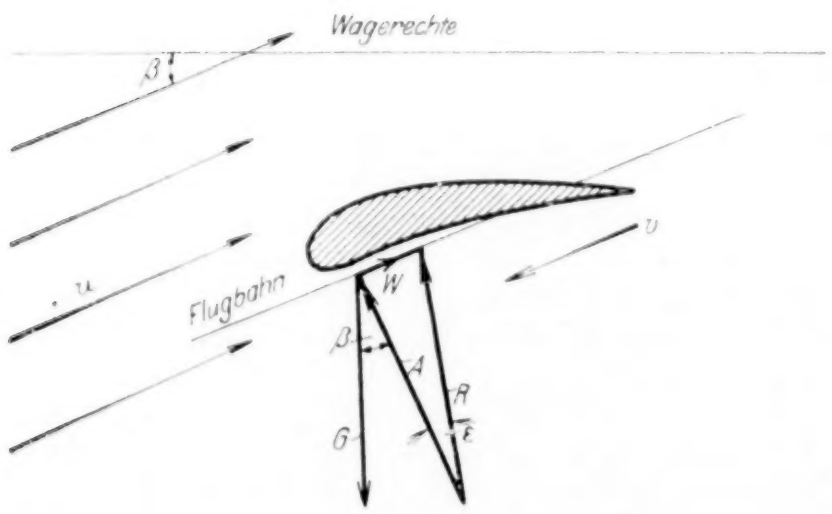


Abb. 2

1. Der statische Segelflug. Der statische Segelflug ist bei weitem der häufigere. Die bisherigen Haupterfolge sind ihm zuzuschreiben. Er ist überall möglich, wo aufsteigende Winde entstehen. Die Naturbeobachtung läßt erkennen, daß dies namentlich in Gebirgen der Fall ist, vielleicht auch an ansteigenden Küsten. Wir werden auf der Luvseite der Anhöhen aufsteigende, auf der Leeseite aber absteigende Luftströmungen vorfinden, Abb. 1. Die Meteorologie wird dem praktischen Flieger Gegenden für seine Flüge erschließen können, wo er mit Regelmäßigkeit genügend starke Steigwinde vorfinden wird.

Der Flugvorgang des statischen Segelfluges[3]) ist, von kleinen, durch den Luftschraubenstrahl hervorgerufenen Abweichungen abgesehen, vollkommen mit dem Flugvorgang des Motorfluges gleichbedeutend.

Unter Zugrundelegung der bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$A = c_a q F, \qquad W = c_w q F, \qquad L = W v,$$

worin bedeuten (vergl. Abb. 2):

---

[1]) Darmstädter Primaner fanden vor zehn Jahren in Mitteldeutschland die kahlen Kuppen der Rhön als besonders geeignet für Gleitflüge, die die Vorschule für das Segelfliegen sind. Eine begeisterte Schar ließ sich 1912 auf der Wasserkuppe, der höchsten Erhebung in der Rhön, nieder. Die Anfangsgründe ihrer Kunst hatten die jungen Leute August Euler in Frankfurt a. M. abgeschaut. Der junge Gutermuth führte 1912 eine Höchstleistung aus, indem er 838 m in 112 Sekunden bei leichtem Gegenwind zurücklegte. Er und seine Kameraden Landmann, Ernst und Eugen von Lößl sind später bekannte, erfolgreiche Flieger geworden. Gutermuth und Ernst v. Lößl fielen im Weltkrieg. Eugen v. Lößl ließ am 24. Jahrestag (1920) des Absturzes Lilienthals am Westabhang der Wasserkuppe infolge Bruchschadens seines Flugzeuges während eines schönen Fluges sein Leben.

[2]) Th. v. Kármán, Mechanische Modelle zum Segelflug. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 220.

[3]) Vergl. auch L. Prandtl, Bemerkungen über den Segelflug. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 209.

F (m^2) Flügelfläche,
G (kg) Flugzeuggewicht,
A (kg) Flugzeugauftrieb senkrecht zur Windströmung,
W (kg) Flugzeugwiderstand, parallel zur Windströmung,
R (kg) Luftkraftresultante,
L (kg m s^{-1}) Flugleistung,
v (m s^{-1}) Fluggeschwindigkeit,
c_a Auftriebsbeiwert
c_w Widerstandsbeiwert } vom Anstellwinkel α abhängig,
c_r Beiwert der Resultante
$q = \frac{\gamma}{2g} v^2$ (kg m^{-2}) Staudruck,
γ (kg m^{-3}) Luftdichte,
g (m s^{-2}) Erdbeschleunigung,

werden bei einem Wind, der mit einem Winkel β gegen die Wagerechte gerichtet ist, ermittelt:

$$v = \sqrt{\frac{A}{c_a \frac{\gamma}{2g} F}} = \sqrt[3]{\frac{L}{c_w \frac{\gamma}{2g} F}}; \qquad L = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_a^3} \frac{A^3}{\frac{\gamma}{2g} F}}.$$

Beim unbeschleunigten statischen Segelflug muß die Luftkraftresultierende R mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfallen. Es werden dann

$$\frac{A}{G} = \frac{c_a}{c_r}; \quad \beta = \varepsilon \quad \text{und} \quad L = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_r^3} \frac{G^3}{\frac{\gamma}{2g} F}}.$$

Die vom Flugzeug aufgenommene Windleistung ist aber dann

$$L = G v \sin \varepsilon.$$

Hiermit wird die Steiggeschwindigkeit des Windes, welche das Flugzeug in unbeschleunigtem wagerechtem Fluge erhält:

$$v \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{c_w^2}{c_r^3} \frac{2g}{\gamma} \frac{G}{F}} = w.$$

Diese Steiggeschwindigkeit w (m s^{-1}) entspricht der Sinkgeschwindigkeit des Flugzeuges. Sie wird um so kleiner, je größer der (mit weniger als 1 vH Fehler) $\frac{c_r^3}{c_w^2}$ gleichzusetzende Wert $\frac{c_a^3}{c_w^2}$ wird. Man erhält daher

$$w_{\min} = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{c_a^3}{c_w^2}}\right)_{\max} \frac{2g}{\gamma} \frac{G}{F}}.$$

Werden ein $1:n$ ansteigender Hang und mit der Hangfläche parallele Windströmung angenommen, so muß die Windgeschwindigkeit u (m s^{-1}) den Wert $\sqrt{(1+n^2)}\, w_{\min}$ überschreiten, um statischen Segelflug zu ermöglichen.

In der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen wurden für den 1921 siegreichen Eindecker der Akademischen Fliegergruppe Hannover folgende Werte[1]) ermittelt:

Bei $\left(\frac{c_a^3}{c_w^2}\right)_{\max} = 300$ sind $c_a = 1{,}35$ und $\frac{c_w}{c_a} = \frac{1}{15}$. Für $c_{a\max} = 1{,}65$ ist $\frac{c_w}{c_a} = \frac{1}{10}$.

Die Flächenbelastung dieses Eindeckers war $\frac{G}{F} = 11$ kg m^{-2}. In einer Massenluftdichte $\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8}$ kg m^{-4} s^2 hat das Flugzeug eine kleinste Sinkgeschwindigkeit

$$w_{\min} = \sqrt{\frac{1}{300} \cdot 16 \cdot 11} = 0{,}77 \text{ m } s^{-1}.$$

---

[1]) W. Blume, Das Segelflugzeug der Akademischen Fliegergruppe der Technischen Hochschule Hannover. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1921, S. 313.

Hierbei hat das Flugzeug eine Geschwindigkeit, wenn — was mit ganz unbedeutendem Fehler geschehen kann — $G = A$ gesetzt wird:

$$v = \sqrt{\frac{1}{c_a}\,\frac{2g}{\gamma}\,\frac{G}{F}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}35}\cdot 16\cdot 11} = 11{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Die kleinste, hiervon nicht sehr verschiedene Geschwindigkeit wird bei $c_{a\,\max} = 1{,}65$ erreicht:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{1}{c_{a\,\max}}\,\frac{2g}{\gamma}\,\frac{G}{F}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}65}\cdot 16\cdot 11} = 10{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

An einem Abhang von $1 : n = 1 : 6$ Neigung muß sein

$$u > 4{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Diese Ergebnisse besagen, daß schon bei geringen Steiggeschwindigkeiten des Windes Segelflug möglich ist, daß aber die Fluggeschwindigkeit selbst recht groß ist. Das Flugzeug läuft Gefahr, aus dem Bereich des aufsteigenden Windes herauszukommen.

Das Flugzeug ist im aufsteigenden Wind an keine Richtung gebunden. Es kann mit oder gegen den Wind und beliebige Wendungen fliegen. Allerdings werden die Geschwindigkeiten über Grund damit sehr veränderlich werden. Hier liegen Gefahrenquellen für den Flieger, der bei einer Wendung in ungenügender Höhe vom Mitwind gegen den Hang geworfen werden kann.

Bei einem Gegenwind von etwa $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ könnte der Hannoversche Eindecker über einem Abhang, wie wir ihn in der Rhön finden, durch eine Anlaufgeschwindigkeit von rd. $6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ zum statischen Segelflug gebracht werden.

Der natürliche Wind ist nicht gleichmäßig, sondern schwankt in großen Grenzen. Bei einer durchschnittlichen Windstärke von $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ werden Böen von 6 bis $7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ zu erwarten sein. Es ist üblich, solche zum Abflug zu benutzen.

2. Der „dynamische" Segelflug. Den dynamischen Segelflug betrachten die strenggläubigen Anhänger des Segelflugwesens als denjenigen motorlosen Flug, dem die Hauptforschungsarbeit zugewandt werden soll. Der natürliche Wind ist stark durchwirbelt; die Wirbel sind beträchtliche Energieträger. Gelingt es, die Wirbel durch das Flugzeug zu schlichten und die entnommene Leistung in Flugzeugschwebeleistung umzuformen, dann sind neue Flugmöglichkeiten gegeben, die zur wirtschaftlichen Ausnutzung anreizen. Leider sind wir im dynamischen Segelflugwesen noch sehr weit zurück. Nach dem heutigen Stande der Technik ist auch wenig Aussicht vorhanden, daß hierin bald eine tiefgreifende Aenderung eintritt.

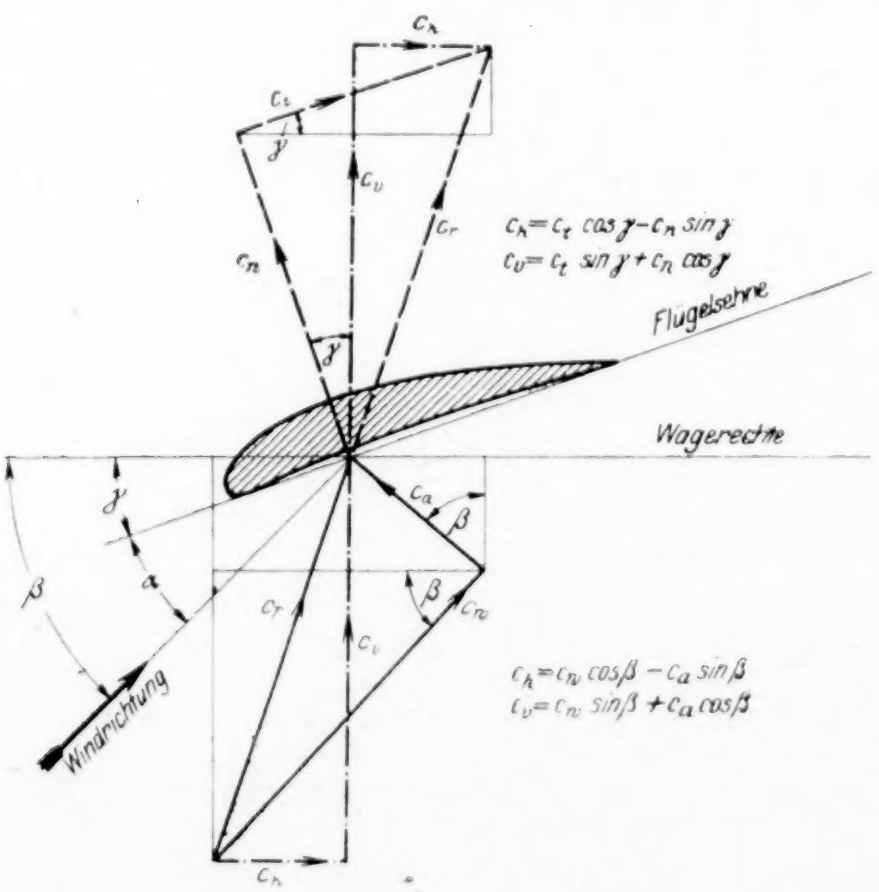


Abb. 3

Die ersten brauchbaren Erklärungen über den Segelflug im Wirbelwind stammen von R. Knoller, der sie nach seinen Angaben[1]) schon 1896 an v. Parseval gegeben, zwei Jahre darauf in Wien vorgetragen, aber erst 1909 in »Flug- und Motortechnik« des Oesterreichischen Flugtechnischen Vereins veröffentlicht hat. Unabhängig von ihm hat Albert Betz 1912 einen Beitrag zur Erklärung[2]) des Segelfluges gegeben, der heute, mit besseren aerodynamischen Unterlagen versehen, gute Einblicke ge-

[1]) R. Knoller, Zur Theorie des Segelfluges. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1913, S. 13.

[2]) A. Betz, Ein Beitrag zur Erklärung des Segelfluges. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1912, S. 269.

währt. Zunächst seien die Betzschen Ueberlegungen, die sich in ihren Grundlagen mit den Knollerschen decken, wiedergegeben.

Betz nimmt an, daß die Richtungsänderung des Windes nach einem Sinusgesetz erfolgt

$$\beta = \beta_0 \sin \lambda t,$$

worin β die Neigung des Windes gegen die Wagerechte, β_0 die größte Neigung, t den Zeitwert und λ einen Faktor bedeuten, welcher durch die Dauer T (s) der Periode bestimmt ist zu $\lambda = \frac{2\pi}{T}$.

In Abb. 3 sind der Anstellwinkel α, die Neigung γ der Flügelsehne gegen die Wagerechte und β eingetragen.

Bei veränderlichem β werden Widerstand und Auftrieb wechseln, wodurch auch Fluggeschwindigkeits- und Richtungsänderungen hervorgerufen werden. Die Masse des Flugzeuges ist jedoch in folgenden Betrachtungen so groß angenommen, daß bei einer nicht zu großen Dauer der Windschwankungsperiode diese Schwingungen des Flugzeuges vernachlässigt werden können. Die Fluggeschwindigkeit wird als gleichförmig angenommen. Die auf das Flugzeug wirkenden Luftkräfte wechseln mit der Zeit. Ihr zeitlicher Mittelwert ist in die Rechnung einzusetzen.

Die nachstehende Untersuchung nach Betz, dem die Modellmessungen [1]) des neuzeitlichen Segeleindeckers der Akademischen Fliegergruppe der Technischen Hochschule Hannover zugrunde gelegt sind, ergibt, daß bei genügend großer Schwankung β_0 der Widerstand negativ wird, daß also Vortrieb eintritt.

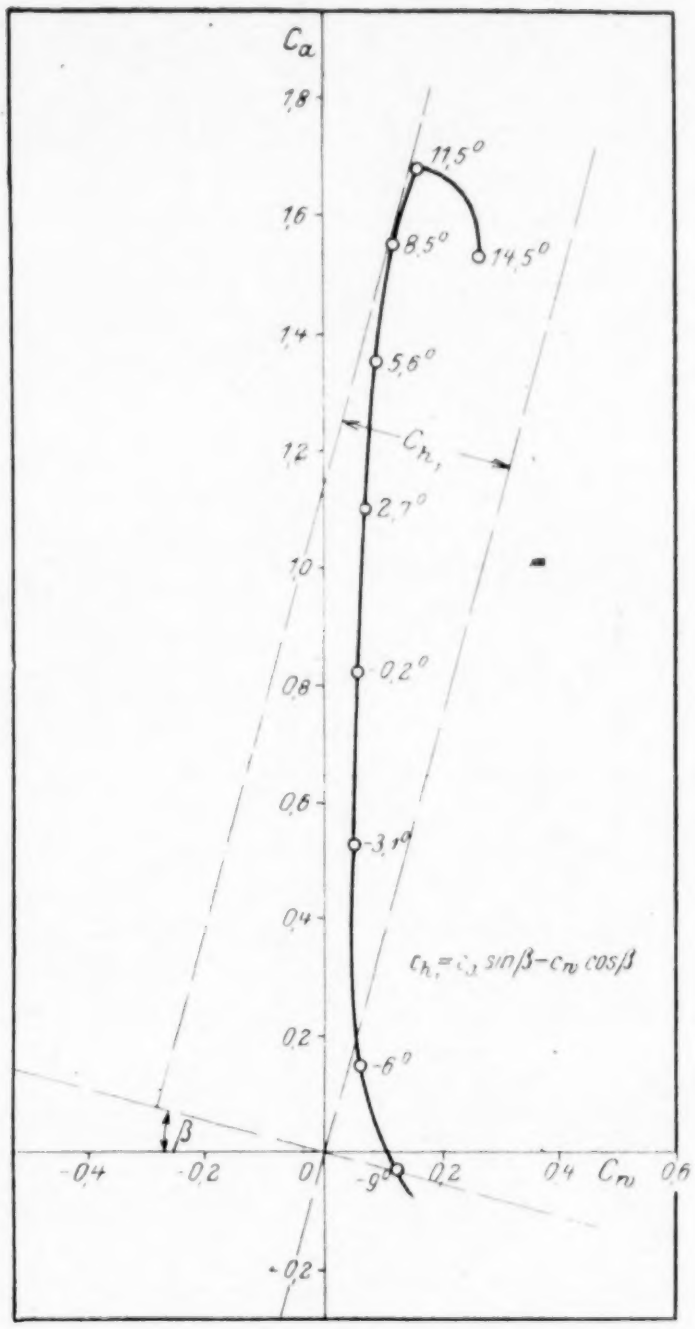


Abb. 4

Der vom Luftkraftsbeiwert c_r herrührende augenblickliche Widerstandsbeiwert c_h in der Wagerechten läßt sich auf zweierlei Weise finden, je nachdem man ihn aus den

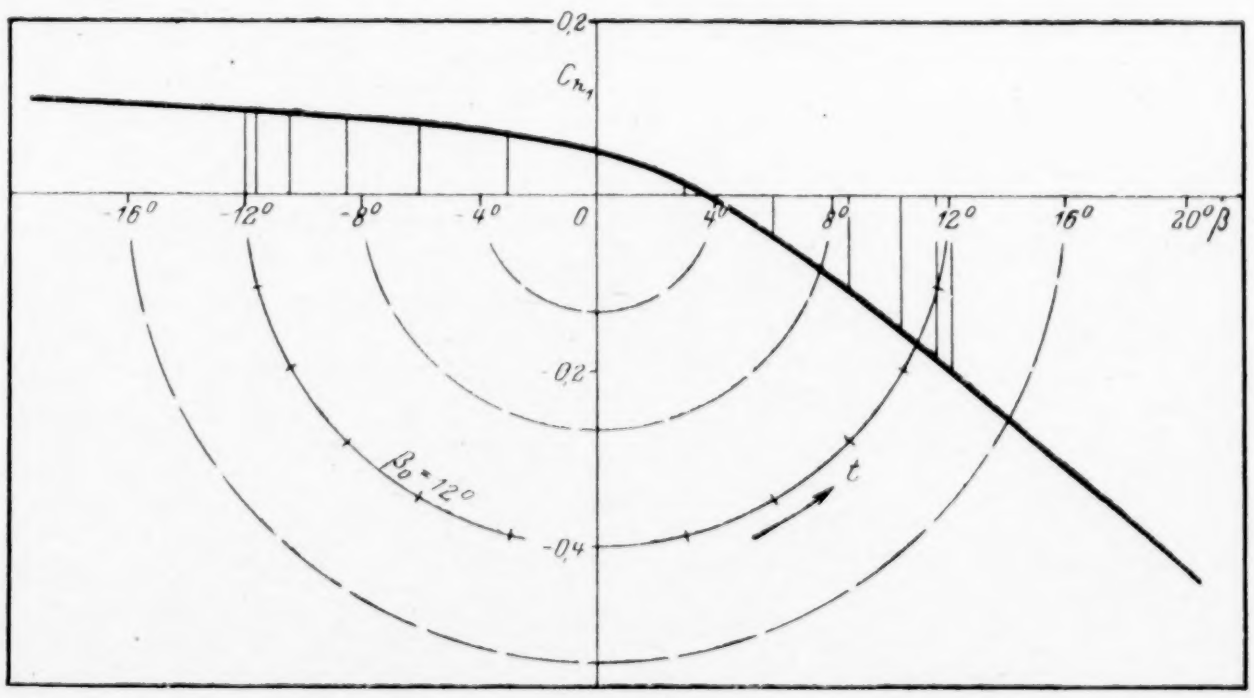


Abb. 5

[1]) Vergl. Anm. 1 auf S. 209.

Komponenten c_w und c_a, parallel und senkrecht zur Flugrichtung oder c_t und c_n, parallel und winkelrecht zur Flügelsehne entstanden denkt (vergl. Abb. 3):
$c_h = c_w \cos\beta - c_a \sin\beta$ oder $c_h = c_t \cos\gamma - c_n \sin\gamma$ bezw. $c_h = c_w \cos(\alpha+\gamma) - c_a \sin(\alpha+\gamma)$, wenn, was meist der Fall ist, für das zu untersuchende Flugzeug die Beiwerte c_n und c_t nicht errechnet sind, aber eine Abhängigkeit von γ erwünscht ist.

Betz unterscheidet grundsätzlich zwei Fälle, den günstigsten, bei welchem das Flugzeug sich stets in die Stellung geringsten Stirnwiderstandes einstellt oder eingesteuert wird, und den einfachsten, wo das Flugzeug einen gleichbleibenden Winkel mit der Wagerechten bildet.

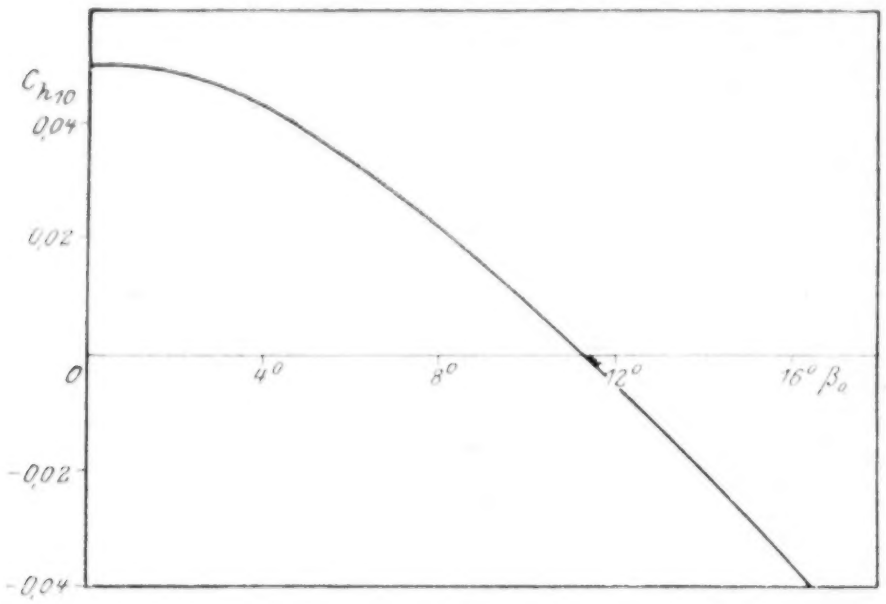


Abb. 6

Er findet den günstigsten Fall aus dem Lilienthalschen Polardiagramm, Abb. 4, durch mehrfache Drehung des Bezugssystems um den jeweiligen Winkel β und Aufsuchen des diesem Winkel entsprechenden kleinsten Widerstandes c_{h1}, da die Drehung des Bezugssystems um den Winkel β für c_{h1} die gleiche Bestimmungsgleichung liefert.

Die auf diese Weise ermittelten wagerechten Widerstandsbeiwerte c_{h1} sind in Abb. 5 abhängig von β eingetragen. Bei größeren positiven β-Werten wird c_{h1} negativ. Von diesen c_{h1}-Werten ist für verschiedene β_0 der zeitliche Mittelwert c_{h10} zu suchen. Da die Windrichtungsänderung nach einem von der Zeit abhängigen Sinusgesetz verläuft, wird dieser Mittelwert durch Eintragen gleicher Zeitabschnitte auf den Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Ordinate für $\beta = 0$ liegt und dessen Radius durch β_0 gegeben ist, sowie durch Mittelwertsbildung der über den auf dem Kreisumfang eingetragenen Zeitabschnitten liegenden c_{h1}-Werte gewonnen.

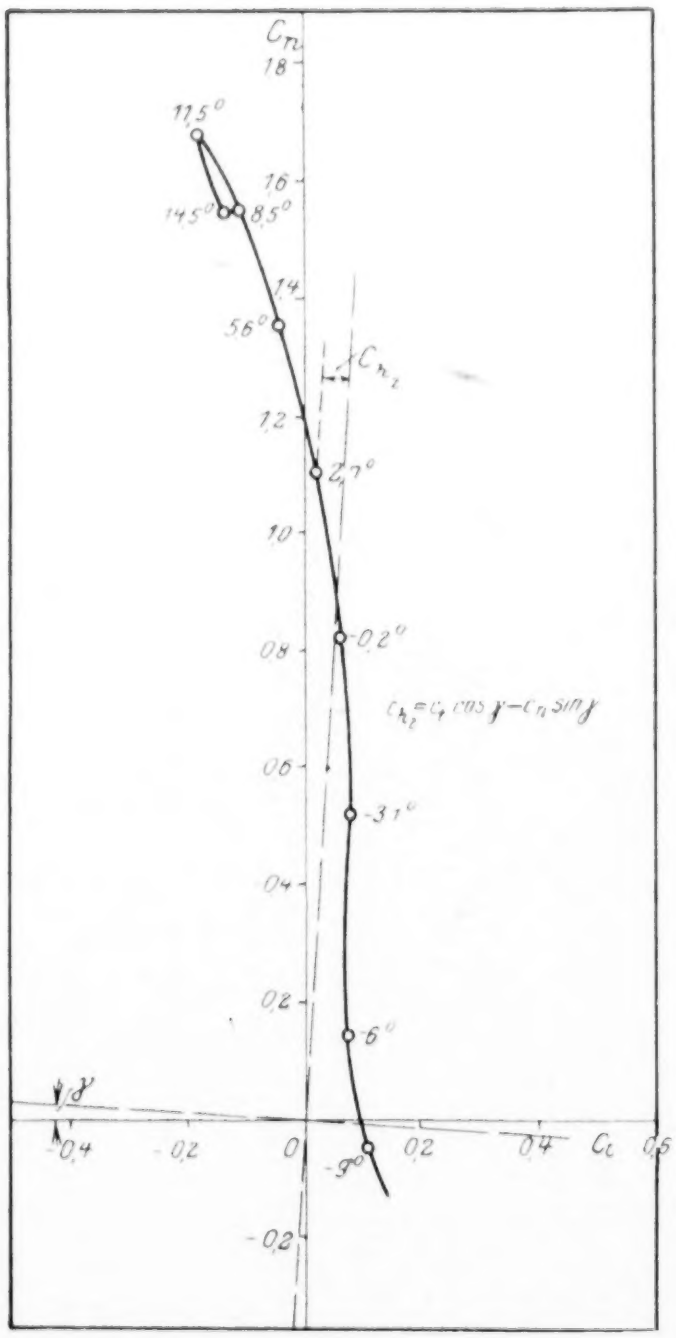


Abb. 7

Die c_{h10}-Werte sind in Abb. 6 abhängig von β_0 aufgetragen. Von $\beta_0 = 11{,}7^0$ ab wird c_{h10} negativ, d. h. es entsteht kein Widerstand, sondern Zug.

Beim einfachsten Fall geht Betz vom Knollerschen Polardiagramm aus, Abb. 7, in welchem als Abszisse die c_t- und als Ordinaten die c_n-Werte eingetragen sind. Nach einmaliger Drehung des Bezugssystems um den Winkel γ und durch Ablesung des auf dieses neue Bezugssystem bezogenen wagerechten Widerstandes c_{h2} bei verschiedenen Anstellwinkeln α werden nach der Beziehung $\beta = \alpha + \gamma$ diese Werte c_{h2} auch für veränderte β Werte gefunden. Die auf diese Weise ermittelten c_{h2}-Werte sind für $\gamma = 6^0$ und $\gamma = 3^0$ in Abb. 8 eingetragen.

Leider reichten die Göttinger Versuchsergebnisse für größere negative β-Werte nicht aus. Die Knollersche Polarkurve wurde extrapoliert. Da es vorkommen kann, daß die Polarkurve bei größeren negativen Anstellwinkeln abbricht, so sind die in Abb. 8 gestrichelt gezeichneten Kurvenzweige ungewiß. Bei der Unter-

suchung an Segelflugzeugen oder Flügelmodellen im Windkanal werden zweckmäßig größere Bereiche negativer Anstellwinkel, als es bei Untersuchungen für Motorflugzeuge notwendig ist, beachtet.

Wie vorhin wird der zeitliche Mittelwert c_{h20} für verschiedene β_0 errechnet und in Abb. 9 abhängig von β_0 aufgetragen.

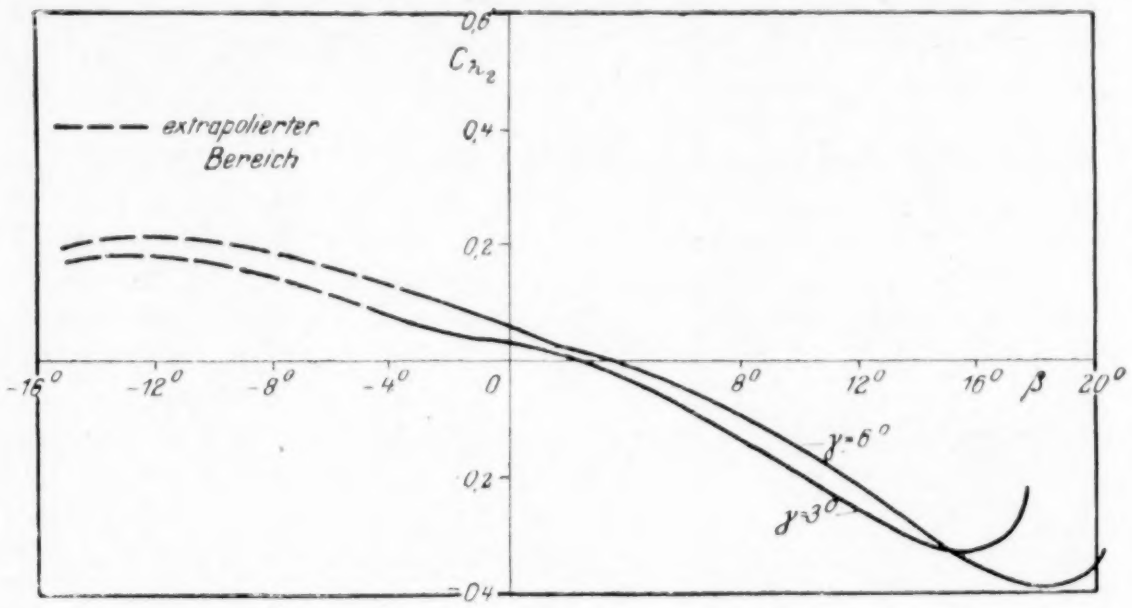


Abb. 8

Die Kurven der Abb. 9 sind in hohem Maße von der Extrapolation der Kurven der Abb. 8 abhängig und besitzen deshalb nur anschaulichen, aber keinen absoluten Wert.

Die Betrachtung der Abb. 9 ergibt, daß ebenfalls bei größeren β_0-Werten, negativer Widerstand, also Zug eintritt.

Der zur Zugerzeugung notwendige Schwankungsbereich β_0 ist sehr groß. Er könnte bei stärker gewölbten Flügeln kleiner werden. Leider ergeben aber stark gewölbte Flügel eine größere Druckpunktwanderung, d. i. bei wechselndem Auftriebsbeiwert größere Aenderung des Momentenbeiwertes der Luftkräfte, so daß die Flügelwölbung nicht übertrieben werden darf.

Die vorstehenden Betrachtungen haben nur dann Gültigkeit, wenn bei der wechselnden Windrichtung β_0 der zeitliche Mittelwert c_{v0} der Auftriebsbeiwerte c_v positiv bleibt.

Die c_v-Werte sind nach Abb. 3 durch die Beziehungen

$c_v = c_w \sin\beta + c_a \cos\beta$ oder $c_v = c_t \sin\gamma + c_n \cos\gamma$ bezw. $c_v = c_w \sin(\alpha+\gamma) + c_a \sin(\alpha+\gamma)$

bestimmt und können in derselben Weise wie die c_h-Werte aus dem Lilienthalschen oder Knollerschen Polardiagramm (vergl. Abb. 4 und Abb. 7) entnommen werden.

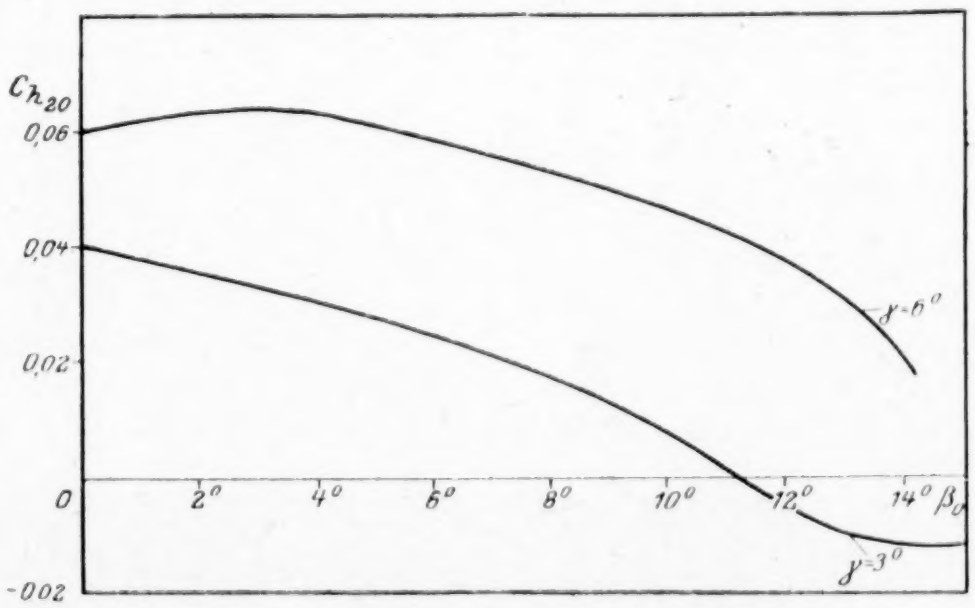


Abb. 9

Diese Betzschen Untersuchungen geben eine Erklärung für die von Otto Lilienthal und dessen Bruder Gustav Lilienthal gemachten Beobachtungen, daß an der Vorderkante gut abgerundete und hoch gewölbte Flügel sich im natürlichen Wind weit besser verhalten als am Rundlauf.

Der Knoller-Betzsche Beitrag zur Erklärung des Segelfluges deckt sich in vielem mit den aus zahlreichen und ausgezeichneten Naturbeobachtungen und eingehender Forschung des Vogelflügelbaues gezogenen Folgerungen Ahlborns, die in einer längeren, ihres reichhaltig gesammelten Stoffes wegen sehr lesenswerten Abhandlung[1]) niedergelegt sind. Leider beschränkt sich Ahlborn bei der Schilderung der Flügelspitzen, denen er die treibende Wirkung bei vorzüglich segelnden Vögeln zuspricht, darauf, diese Eigenschaft an wenig überzeugend gehaltenen, die Mechanik des Vortriebes darstellenden Abbildungen zu erläutern. Da beim Segelflug

[1]) Fr. Ahlborn, Der Segelflug, Erklärung des Segelflugs der Vögel, Die Möglichkeit des Fliegens ohne Motor. Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, Heft 5, Juli 1921.

der Vögel lotrechte Schwankungen kaum wahrgenommen werden, zieht Ahlborn den Schluß, daß die in Windböen gewonnene Leistung durch die von der Natur in ihrem statischen Aufbau hierzu geeigneten Triebflügel in Zugleistung umgesetzt wird, während der innere Flügelteil, dem die Anpassungsfähigkeit an Windrichtungsschwankungen fehlt, als Tragflügel zu gelten hat, dessen Widerstandsleistung durch die Zugleistung der Treibflügel überwunden wird.

Vereinigen wir aber den günstigsten Fall von Betz, der auf die äußeren Triebflügel nach Ahlborn anzuwenden wäre, mit dem einfachsten Fall von Betz, welcher auf die inneren Tragflügel nach Ahlborn Geltung haben müßte, so erhalten wir eine Verbindung von mechanisch schlüssigen Erscheinungen.

Nach Fertigstellung dieses Berichtes erschien in der »Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt«, 1922, S. 80 und 95, eine lesenswerte Arbeit von R. Katzmayr »Ueber das Verhalten von Flügelflächen bei periodischen Aenderungen der Geschwindigkeitsrichtung«. Katzmayr gibt zwei am Wiener aeromechanischen Laboratorium durchgeführten Versuchsreihen bekannt. Bei der ersten Gruppe wurden die Versuchsflügel um eine ihrer Querausdehnung parallele Achse im gerade gerichteten Luftstrom periodisch geschwenkt. Bei der zweiten Gruppe wurde der Luftstrom durch geeignete Leitvorrichtungen auf die feststehenden Flügel periodisch abgelenkt.

Die Katzmayrschen Versuche hatten sehr bemerkenswerte Ergebnisse. Bei der ersten Anordnung wuchs der Widerstand der Flügel mit zunehmendem Schwenkwinkel, der Auftriebsbereich für verschiedene Anstellwinkel wurde mit zunehmendem Schwenkwinkel kleiner, und bei genügend groß gehaltenen Schwenkwinkel kleiner, und bei genügend groß gehaltenen Schwenkwinkeln wurde sogar eine Grenze für Auftrieb und Widerstand erreicht, bei welcher Anstellwinkel einflußlos waren. Diese Beobachtungen waren von der Schwingungszahl der Flügel unabhängig. Eine im gerade gerichteten Luftstrom vorgenommene, zur Flügelsehne parallele periodische Verschiebung der Flügel ergab eine geringe Verschlechterung der aerodynamischen Beiwerte.

Bei der zweiten Versuchsgruppe wurde eine Abnahme des Widerstandes, wiederholt sogar Vortrieb bei vorhandenem Auftrieb gemessen. Bei größeren Luftablenkungsbereichen verbesserten sich diese Beobachtungen. Bei gleichzeitiger periodischer Bewegung der Flügel und des Luftstroms war eine Verbesserung des Widerstands nicht zu erreichen.

Die Katzmayrschen Versuche geben noch keinen Aufschluß über die Gründe des Unterschieds in den Beobachtungen bei beiden Versuchsgruppen, die einander mechanisch gleich sein sollten.

3. Allgemeine Theorie. Während die Erklärung des Segelfluges nach Ahlborn, Betz und Knoller sich mit der Leistungsumsetzung am Flügel befaßt, geht v. Kármàn an die gestellten Aufgaben allgemein heran[1]) und läßt die unmittelbare Uebertragung seiner wichtigen Folgerungen auf das Flugzeug offen. Wir dürfen wohl erwarten, daß v. Kármàns Schüler, der erfolgreiche Segelflieger Klemperer, in seiner in Arbeit befindlichen Dissertation hierauf näher eingehen wird.

v. Kármàn fußt auf der zuerst von A. Bazin 1890, einige Jahre später auch von Lanchester gezeigten Vorrichtung (vergl. Abb. 10) zur Erläuterung des dynamischen

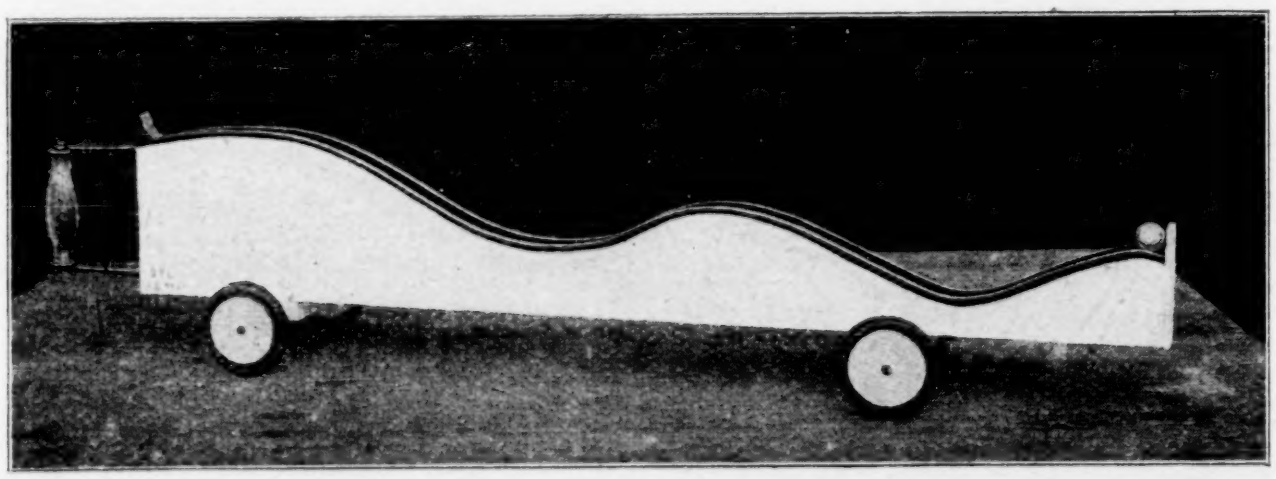


Abb. 10

[1]) Vergl. Anm. 2 auf S. 208.

Segelfluges. Eine in einer wellenförmigen Rille laufende Kugel wird durch geeignet beschleunigte und verzögerte wagerechte Bewegung der Rille vom tief gelegenen Anfangspunkt zum hoch gelegenen Endpunkt gehoben. Der rechnerisch am einfachsten zu handhabende Fall ist dann gegeben, wenn angenommen wird, daß die Bewegung (Windbewegung) der Unterlagen nach einem Sinusgesetz erfolgt:

$$u = u_0 + u_1 \sin(\lambda t).$$

Hierin sind wie vorhin $\lambda = \frac{2\pi}{T}$ und T die Dauer einer Periode.

Die Beschleunigung

$$b = \frac{du}{dt} = u_1 \lambda \cos(\lambda t)$$

wirkt auf die Kugel, welche die Masse m besitzt. Die Bewegung der Kugel gegen die Schiene erfolgt ebenfalls nach einem Sinusgesetz, aber um die Phase φ verschoben:

$$v = v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi).$$

Durch die beschleunigte Bewegung der Unterlage wirkt auf die Kugel eine entgegengesetzt gerichtete Kraft

$$P = -mb = -m\lambda u_1 \cos(\lambda t),$$

welche die Bewegung der Kugel auf ihrer um $\varkappa$ geneigten Unterlage mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{\cos\varkappa}$ verschiebt (vergl. Abbild. 11).

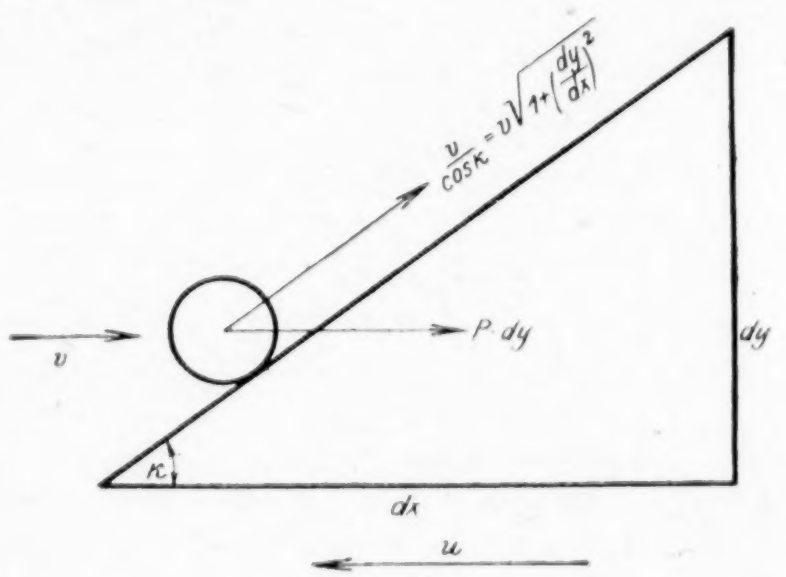


Abb. 11

v. Kármán stellt die Forderung, die Wellenbahn $y = f(x)$ so zu berechnen, daß die Kugelbewegung tatsächlich der für sie angeschriebenen Gleichung genügt, und untersucht die Bedingungen, unter welchen ein Steigen der Kugel, d. h. ein mechanischer Energiegewinn möglich ist. Zu diesem Zweck stellt er die Energiegleichung auf:

Potentielle Energie (mgy), vermehrt um die lebendige Kraft der Kugel $\left[\frac{1}{2} m \left(\frac{v}{\cos\varkappa}\right)^2\right]$ ergeben unter Vernachlässigung der Reibung diejenige Arbeit $\int_0^t P v\, dt$, welche mit dem Widerstand P bei der Geschwindigkeit v in einem betrachteten Zeitabschnitt 0 bis t geleistet wird:

$$mgy + \frac{1}{2} m \left[v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi)\right]^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \text{konst.} - \frac{\lambda u_1}{g} \int_0^t [v_0 + v \sin(\lambda t + \varphi)] \cos(\lambda t)\, dt.$$

Umgeformt und für den Zeitabschnitt 0 bis t integriert:

$$y = \text{konst.} - \frac{1}{g} \left\{ \frac{1}{2} [v_0 + v_1 \sin(\lambda t + \varphi)]^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + u_1 \sin(\lambda t) \left[v_0 + \frac{v_1}{2} \sin\varphi \cos(\lambda t)\right] - \frac{u_1 v_1}{4} \cos\varphi \cos(2\lambda t) \right\} - \frac{u_1 v_1}{2g} \lambda t \sin\varphi.$$

Diese letzte Beziehung besitzt mit Ausnahme des letzten Gliedes mit der Zeit periodisch wechselnde Glieder. Der Höhengewinn während der Periode T ist durch das letzte Glied gegeben zu

$$\Delta y = \frac{\pi}{g} u_1 v_1 \sin\varphi.$$

Für die weitere Rechnung wird angenommen, daß v_1 und u_1 gegen v_0, sowie $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen 1 klein sind:

Die Ausgangsbeziehung wird damit in erster Näherung

$$y_1 = y_0 - \frac{v_0}{g}(u_1 + v_1 \cos\varphi)\sin(\lambda t) + \frac{v_0 v_1}{g}\sin\varphi\cos(\lambda t),$$

oder abgekürzt

$$y_1 = y_0 - h\sin(\lambda t + \delta).$$

Hierin bedeutet h die halbe Wellenhöhe der lotrechten Schwingungsbewegung und ist durch

$$h = \frac{v_0}{g}\left[{u_1}^2 + 2u_1 v_1 \cos\varphi + {v_1}^2\right]$$

gegeben, während δ durch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{v_1 \sin\varphi}{(u_1 + v_1\cos\varphi)}$$

bestimmt ist.

Durch Elimination von v_1 wird erhalten

$$\Delta y = \pi\frac{{u_1}^2}{g}\left[\cos\varphi + \sqrt{\left(\frac{hg}{u_1 v_0}\right)^2 - \sin^2\varphi}\right]\sin\varphi,$$

für $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{gh}{u_1 v_0}$ wird Δy zum Größtwert.

$$\underline{\Delta y = \pi h\frac{u_1}{v_0}}.$$

Dies wichtige Ergebnis sagt aus, daß der Höhengewinn während einer Periode durch das Geschwindigkeitsverhältnis der Böenschwankung zur mittleren Fortschreitungsgeschwindigkeit und die Höhe der Wellenbewegung beeinflußt ist.

Auf Segelflugzeuge angewendet, müßte die Forderung kleiner Fluggeschwindigkeit und möglichst großer Wellenhöhen gestellt werden, was mit wendigen Flugzeugen kleiner Flächenbelastung erreicht werden kann.

Eine zweite Art, aus böigem Winde Energie zum Anstieg zu gewinnen, ist die Kreisbewegung, die ebenfalls von v. Kármán erklärt worden ist. Klemperer hat hierfür eine schraubenförmig gewundene Röhre als veranschaulichendes Modell angegeben[1]), das in Abb. 12 wiedergegeben ist. In Abb. 13 ist die Wirkungsweise dargestellt. Das Schraubenrohr wird um eine außen gelegene parallele Drehachse gleichmäßig geschleudert. Die Zentrifugalbeschleunigung b setzt sich mit der Erdbeschleunigung g zu einer resultierenden Beschleunigung r zusammen, welche auf der um $\varkappa$ geneigten Bahn senk-

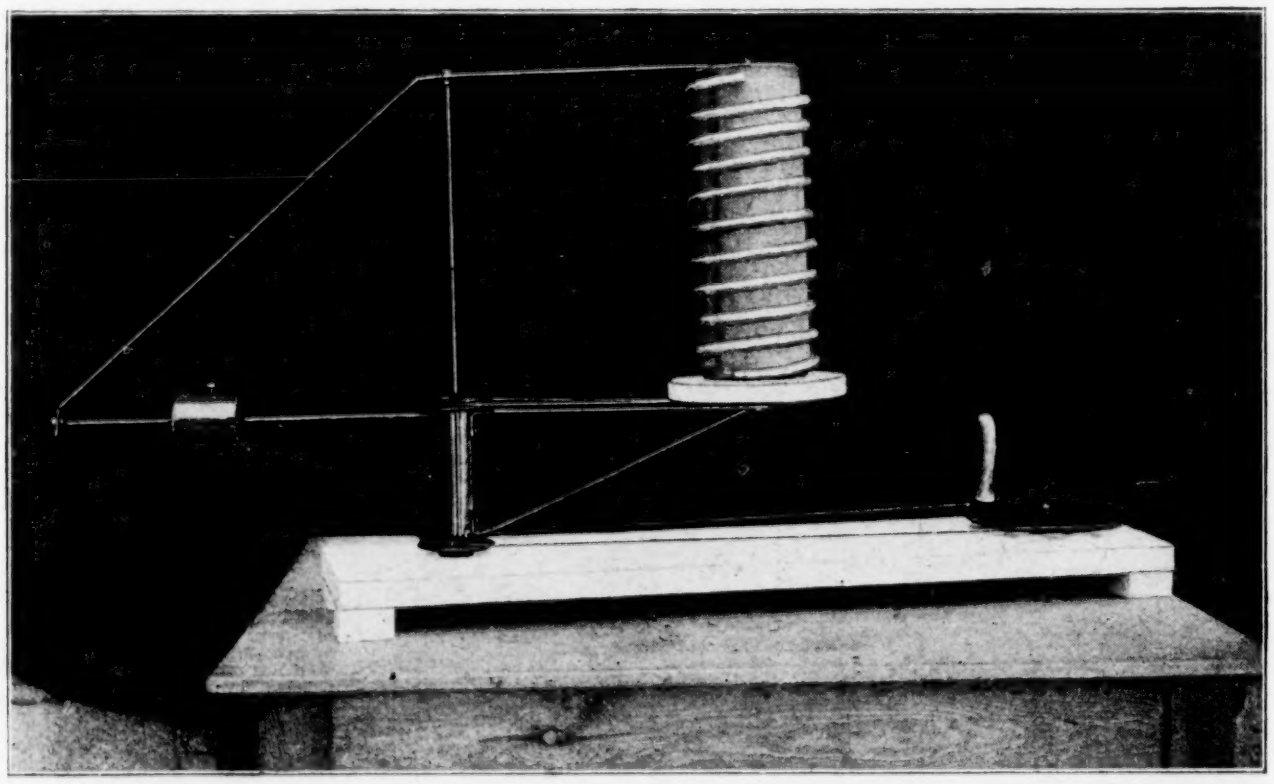


Abb. 12

[1] Vergl. Anm. 2 auf S. 208.

recht steht. Das Schraubenrohr muß sich so schnell um sich selbst drehen, daß die durch einen Ruck in Bewegung gesetzte Kugel aufsteigt. Die Beziehung besteht:

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{b}{g}.$$

Zum Segelflug ausnutzbare Kreiswirbel sind selten. In folgendem wird gezeigt, daß auch durch hin- und herschwingende Bewegung ein schraubenförmiger Aufstieg der Kugel hervorgerufen werden kann. Bei dieser schwingenden Bewegung muß offenbar dafür gesorgt sein, daß die Tangentialbeschleunigung am Kreisumfang immer gleichgerichtet ist. Die Tangentialbeschleunigung b ist mit der Schwingungsbeschleunigung p durch die Beziehung verbunden:

$$b = p \sin \lambda t.$$

Die Beschleunigung p wechsele für sich nach der Regel

$$p = \lambda u_1 \sin (\lambda t),$$

so daß für b das Gesetz gilt:

$$b = \lambda u_1 \sin^2 (\lambda t).$$

Da die Sinusfunktion im Quadrat erscheint, ist gleichbleibendes Vorzeichen für b gesichert.

Die mittlere Beschleunigung ist gegeben durch die Beziehung

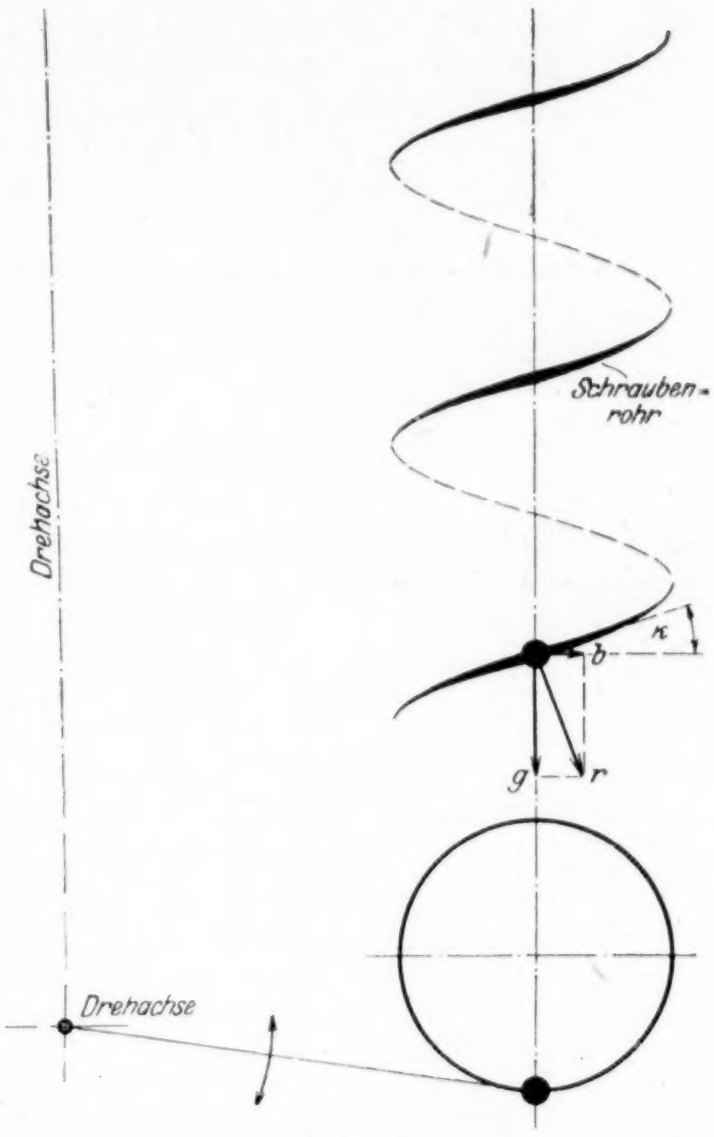


Abb. 13

$$b_m = \frac{2 \lambda u_1}{\lambda T} \int_{t=0}^{t=T/2} \sin^2 (\lambda t)\, d\,(\lambda t) = \frac{\lambda u_1}{2} = \pi \frac{u_1}{T}.$$

Bei Annahme dieses Schwingungsgesetzes ist die größte Beschleunigung

$$b_{\max} = \lambda u_1 = 2 \pi \frac{u_1}{T},$$

also doppelt so groß wie die mittlere. Die mittlere Neigung der Schraubenlinie ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{b_m}{g} = \pi \frac{u_1}{T g}.$$

Ein Segelflug nach dieser Weise ist möglich, wenn das Flugzeug beim Richtungswechsel der Beschleunigungen sich stets zur Luvseite des Geschwindigkeitszuwachses wendet.

Ahlborn gibt in seiner Arbeit [1]) viele eigene Beobachtungen des kreisenden Segelfluges, den er ähnlich erklärt, an.

Endlich sei noch einer Segelflugart, des »Inversionsflugs« gedacht, die von Wolfmüller [2]) empfohlen wird. Wolfmüller arbeitet mit zwei durch eine Leine verbundenen Flugzeugen, die sich in Schichten verschiedener Windstärke befinden. Es ist einleuchtend, daß durch solch eine Vorrichtung gegenseitiges Schleppen eintritt. Leider hat diese, den Segelschiffen ähnlichste Art des Segelns wenig Aussicht auf Verwirklichung, da die Stabilitätsverhältnisse sehr schwer zu beherrschen, und da die Widerstände der Verbindungsleinen überwiegend sein werden. Trotzdem sind Segelflüge dieser Art über viele km Strecke zustande gekommen, als Fesseldrachengruppen, für meteorologische Aufstiege bestimmt, sich von ihrer Erdverbindung abgerissen hatten.

---

[1]) Vergl. Anm. 1 auf S. 213.

[2]) Al. Wolfmüller, Zur Segelflugentwicklung. Flugsport 1921, S. 26.

Der Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921 und die daran anschließenden Flüge haben die Möglichkeit des Segelflugs wiederum praktisch bestätigt[1]). Auf Flugzeugen mit großem Seitenverhältnis (bis herauf zu $\sim 10:1$) und niederer Flächenbelastung (zwischen ~ 6 bis $\sim 11\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$) sind Flüge bis zu 21 min Dauer und 7,5 km Länge ausgeführt worden. Wenn auch die meisten Flüge auf größerer Höhe begonnen und tief im Tal endigten, so hatten die Führer unterwegs doch Gelegenheit, sowohl statisch, als auch dynamisch zu segeln. Für dieses Jahr sind wiederum Wettbewerbe geplant, welche geeignet sind, das Segelflugwesen weiter zu fördern.

Die baulichen Aufgaben beim Segelflugzeug sind mannigfach. Wir dürfen bestimmt erwarten, daß die Entwicklung dieser Flugzeuge auch rückwirkend den Verkehrsflugzeugen mit motorischem Antrieb in ihrem Aufbau zugute kommen wird. 155

[1]) W. Hoff, Bericht über den Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921. Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, 6. Beiheft der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Januar 1922, S. 41. — W. v. Langsdorff, Rhön-Segelflug-Wettbewerb 1921, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Bd. 12, Nr. 18, S. 278; Flugsport, Bd. 13, August 1921, Nr. 16, 17, 18, S. 348, 376, 394. — W. v. Langsdorff, Dr.-Ing. R. Eisenlohr, Luftfahrt, Bd. 25, September-Oktober 1921, Nr. 9, 10, S. 151, 168.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Graphische Statik. — Das Seilpolygon. Die Grundlage der graphischen Statik bildet das Seilpolygon von Culmann, jene Konstruktion, die das Zusammensetzen von Kräften in der Ebene in so wunderbar einfacher Weise leistet. T. Bleckmann zeichnet das Seilpolygon für parallele Lasten abweichend vom üblichen Verfahren, indem er das Ziehen der Seilseiten als Parallele zu den Polstrahlen des Kräftepolygons vermeidet (Eng. News-Record 1920, aus Der Eisenbau 1921, S. 65 u. 66). Es wird benutzt, daß zwei aufeinander folgende Seilseiten auf einer zur Kraftrichtung parallelen Geraden eine Strecke abschneiden, die gleich dem statischen Moment der durch den Schnittpunkt der Seilstrahlen hindurchgehenden Kraft bezüglich dieser Achse ist. Trägt man also auf einer Geraden links und auf einer rechts von den Kräften die statischen Momente der einzelnen Kräfte für diese Achsen in umgekehrter Reihenfolge auf, so sind die durch kreuzweises Verbinden der so bestimmten Punkte erhaltenen Linien, die Seilseiten. — Das statische Moment der Kraft kann man als geometrische Proportionale aus dem Kräftepolygon finden. Es empfiehlt sich, zwei Kräftepolygone zu konstruieren, deren Pole in die Achsen zu legen und das linke nach rechts und das rechte nach links zu zeichnen. Die Richtungslinie einer Kraft schneidet dann in beiden Polygonen zwischen den der Kraft zugehörigen Polstrahlen, die statischen Momente bezüglich der beiden Achsen ab. — Mitunter mag diese Art des Auftragens vom Seilpolygon vielleicht Vorteile bieten.

Ueber die Lagerung von Raumfachwerken. Wenn der Aufbau eines Raumfachwerks mit ebenem Fußring dem Bildungsgesetz folgt, so genügt es zur Kennzeichnung der Stabilität den Fußring zu untersuchen. Ist dieser eine Gelenkpolygon von n Seiten, so ist mit n Stützstäben in der Lagerebene die notwendige Stabzahl für ein (stereo)statisch bestimmtes, gestütztes ebenes System vorhanden. Trotz der richtigen Stabzahl muß der Stabzug nicht stabil sein; er ist stabil, wenn sich die Stabkräfte bei jedem Angriff eindeutig ergeben. So ist ein regelmäßiges n-Eck mit n radialen Führungslagern bei einer geraden Anzahl von Stäben im allgemeinen labil (d. h. von endlicher Beweglichkeit), bei ungerader Seitenzahl stabil. Das einfachste Kriterium für die Stabilität liefert die Kinematik mit dem sog. »Plan der gedrehten Geschwindigkeiten«[1]). Trägt man bei einem Stab die unendlich klein gedachten Verschiebungen der Endpunkte um 90° gedreht auf, so ist die neue gedrehte Lage des Stabes parallel der ursprünglichen. Man erteilt nun bei dem zu untersuchenden Stabzug einem Knotenpunkt eine frei gewählte Verschiebung, die der Lagerbedingung entspricht und zeichnet der Stüzung gemäß den kinematischen Verschiebungsplan von Knoten zu Knoten fortschreitend. Kommt man zum letzten Punkt, so sieht man aus der graphischen Darstellung, ob die eingeleitete Verschiebung möglich war (das System labil ist) oder nicht (d. h. das System stabil ist). L. Geusen zeigt auf Grund geometrischer

[1]) Siehe hierüber: A. F. Zschetzsche, Handbuch der Baustatik, 1. Bd., Düsseldorf 1912, Art. 3 sowie Art. 9 (Methode der Polpläne); und vergl. demgegenüber das Kennzeichen der Verschieblichkeit bei H. Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 4. Aufl., Stuttgart 1905, S. 458.

Betrachtungen (Zur Berechnung von Fachwerkträgern, Zentralblatt der Bauverwaltung 1921, S. 273 bis 275) an den Beispielen von Sehnenvielecken mit radialen Führungslagern, sowie an symmetrischen Sehnenvielecken mit symmetrisch angebrachten Führungslagern nicht radialer Richtung, wann der Plan der gedrehten Geschwindigkeiten eine mögliche Verschiebung ergeben muß.

Berechnung eines Tragwerks, bei dem einzelne Stäbe biegungssteif ausgebildet sind. Ein Fachwerk ist nach üblicher Definition ein System von Stäben, die gelenkig miteinander verbunden und in den Gelenkstellen von Kräften ergriffen sind. Die Stäbe sind daher nur in ihrer Längsrichtung beansprucht. Im Bauwesen sind Stäbe eines Tragwerks häufig auch querbelastet. Sind die Knoten steif, so liegt ein Rahmentragwerk vor, dessen Berechnung hinlänglich geklärt ist. In praxi wird jedoch oft näherungsweise vorgegangen. R. Schick-Sterkrade berechnet ein als Kranbahnträger in Verwendung stehendes Tragsystem, das als Fachwerk aufgefaßt ein (stereo)statisch bestimmtes parallelgurtiges Strebenfachwerk wäre, bei dem aber der in gleiche Feldweiten unterteilte Obergurt Querlasten aufzunehmen hat und biegungssteif ist (Berechnung von Fachwerkträgern mit biegungsfestem Obergurt, Kranbahnträger, Der Bauingenieur 1921, S. 93 bis 97 und S. 126 bis 130). Es wird vorausgesetzt, daß Untergurt- und Füllungsstäbe miteinander gelenkig verbunden, sowie daß die Füllungsstäbe am Obergurt gelenkig angeschlossen sind. Das Tragwerk ist also ein durchlaufender Träger, der in den Knoten von einem Fachwerk elastisch gestützt ist; bei n-Feldern im Obergurt ist es n-1fach (stereo) statisch unbestimmt. Als Hauptsystem wird der mit unveränderlichem Trägheitmoment durchgehende Obergurt als Balken auf zwei Stützen gewählt; als Ueberzählige, die in seinen Knotenpunkten durch die Unterstützung hervorgerufenen Momente. Die Berechnung erfolgt mittels der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr. Durch eine zahlenmäßige Vergleichsrechnung wird gezeigt, daß es zulässig ist, das Unterstützungsfachwerk durch einen Stab von konstantem Trägheitsmoment zu ersetzen. Die Größe dieses Trägheitsmoments wird aus der Bedingung bestimmt, daß die Winkeländerung an einem Knoten infolge des daselbst wirkenden Moments »Eins«, beim System mit dem Ersatzstab dieselbe sein soll, wie beim tatsächlich vorhandenen System. Die Wahl des Knotenpunkts ist hierbei nicht von großem Einfluß. Jetzt läßt sich die Rechnung leicht erledigen. Ist im Knoten n das Biegungsmoment für den Freiträger $\mathfrak{M}_n$ und X_n die Ueberzählige, so ist das Moment: $M_n = \mathfrak{M}_n + X_n$. Aus den Elastizitätsgleichungen ergibt sich $X_n = \varphi \cdot \eta_n$, wobei $\varphi = J_2 : (J_1 + J_2)$, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente des Obergurts bzw. des Ersatzstabes und η_n einen unbekannten Zahlenfaktor vorstellen. Sind die Knoten fest unterstützt, so ist $J_2 = \infty$ und das Biegungsmoment in n: $M_n' = \mathfrak{M}_n + \eta_n$. Daher ist $M_n = \varphi \cdot M_n' + (1 - \varphi)\, \mathfrak{M}_n$ und somit die Aufgabe auf den kontinuierlichen Träger mit festen Stützen hingeleitet. — Daß der Einfluß der Längskräfte im Obergurt nicht beachtet ist, entspricht der gebräuchlichen Berechnungsweise von Rahmentragwerken. Von Interesse wäre es aber jedenfalls, die Längskräfte mit ihren Ausbiegungen zu berücksichtigen, da auf diese Weise auch der Knickfestigkeit des Systems näher getreten werden könnte.

Die Berechnung des biegungssteifen Stabzugs. Der biegungssteife, an seinen Enden eingespannte dreifach (stereo)statisch unbestimmte Stabzug läßt bekanntlich eine äußerst bequeme Behandlung zu, da es möglich ist, die drei Ueberzähligen je aus einer Gleichung zu erhalten. H. Müller-Breslau[1]) berechnet den Stabzug (oder geschlossenen Rahmen) mit Hilfe des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit. Es wird das Koordinatensystem x, y, in dessen Ursprung die Ueberzähligen angreifen, so gewählt, daß der Koordinatenanfangspunkt mit dem Schwerpunkt der sog. Gewichte $ds : J$ zusammenfällt und die Achsen x und y Hauptachsen für den Stabzug sind (ds ist das Stabelement, J das Trägheitsmoment des Querschnitts). Hierdurch werden die drei Unbekannten von einander unabhängig. O. Mohr[2]) zeigt, daß, wenn bei der Formänderung des Rahmens nur die Stabbiegungen in Betracht kommen, die Drehungsgewichte $M\,ds : EJ$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden (M ist das Biegungsmoment, welches auf die Stabstrecke ds einwirkt, E der Elastizitätsmodul des Materials). Es muß also die Momentensumme der Drehungsgewichte inbezug auf drei beliebig gewählte Achsen der Rahmenebene, die sich nicht in einem Punkt schneiden, gleich Null sein. Man kann so aus drei Gleichungen drei willkürlich gewählte Ueberzählige bestimmen, wenn man die Gewichte als Funktion jener Ueberzähligen einführt. Werden die drei Schwerpunkte der von den einzelnen Unbekannten abhängigen Drehungsgewichte berechnet und die Momentengleichungen auf drei Achsen bezogen, die durch je zwei der Schwerpunkte hindurchgehen, so entstehen Gleichungen von denen jede nur eine Unbekannte enthält. Der Einfluß der Stabdehnungen wird mit Einführung von Dehnungsgewichten berücksichtigt, die in gleichwertige Drehungsgewichte verwandelt mit den früheren Drehungsgewichten ein Gleichgewichtssystem bilden.

G. Spiegel will in Anlehnung an das Mohrsche Verfahren die Berechnung des eingespannten Stabzuges dadurch erleichtern, daß er ein einfach statisch unbestimmtes Hauptsystem, den einerseits eingespannten, andererseits mittels Gleitlager gestützten Träger wählt (Zur

---

[1]) Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 4. Aufl., Leipzig 1904, S. 122 bis 143.

[2]) Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik, 2. Aufl., Berlin 1914, Abhandlung 13.

Berechnung biegungssteifer Stabzüge. Der Bauingenieur 1921, S. 40 bis 46). Hier möge eine grundsätzliche Bemerkung Platz finden. Man kann durch Zurückführen auf ein statisch unbestimmtes Hauptsystem wohl die Ueberzähligen etappenweise berechnen, aber man kann ihre Anzahl hierdurch doch nicht verringern. Spiegel hat diesbezüglich offenbar einen Fehler begangen; auch die Hinstellung von Gleichungen, die nur das Superpositionsgesetz verkörpern, als »Bestimmungsgleichungen« ist nicht zutreffend. (Mehrteilige Rahmen, Berlin 1920, auf S. 17.)

In geschickter Weise berechnet B. Enyedi den eingespannten Bogenträger nach dem Verfahren von Mohr. (Beitrag zur Berechnung des eingespannten Bogenträgers auf Grund der Elastizitätstheorie. Der Eisenbau 1921, S. 34 bis 43.) Angenommen wird — wie es bei gewölbten Brücken in der Regel der Fall ist — als Bogenachse eine symmetrische flache Parabel, sowie daß die Vertikalprojektion der Trägheitsmomente der Querschnitte einen konstanten Wert hat. Dadurch wird es möglich, die Ueberzähligen des eingespannten Stabzugs in geschlossener Form zu erhalten. Enyedi zerlegt den Angriff in vier Teilangriffe, herrrührend von den drei Unbekannten (den beiden Einspannmomenten und dem Horizontalschub) und den Lasten. Bei bloßer Berücksichtigung der Biegung sind die Drehungsgewichte sämtlicher Teilsysteme zusammen ein Gleichgewichtssystem. Durch Aufstellen von drei Momentengleichungen werden die Ueberzähligen bestimmt

Ratzersdorfer. 76

Elektrotechnik.

Eisenhaltige Schwingungskreise. Die Arbeit von J. Biermanns »Die Resonanzspannungen bei eisenhaltiger Induktivität« (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 30) behandelt das Problem des eisenhaltigen Schwingungskreises, das durch die Petersensche Erdschlußdrossel zur Kompensierung des Erdschlußstroms in Hochspannungsnetzen neuerdings von praktischer Bedeutung geworden ist. Für die analytische Erfassung des Zusammenhangs zwischen dem Magnetisierungsstrom i und dem Kraftfluß im Eisenkern der Drossel wird der Ansatz gemacht

$$i = \sum_{k=1}^{k=\infty} \pm A_k \varphi^k.$$

Dabei dürfen nur die ungeraden Potenzen genommen werden, da die Magnetisierungskurve, abgesehen von der Hysteresis, im ersten und dritten Quadranten verläuft. Für praktische Zwecke genügt es, die ersten drei Glieder der Reihe zu berücksichtigen, so daß die Magnetisierungskurve durch die Funktion

$$i = \frac{z}{L}(\varphi - a\varphi^3 + b\varphi^5) \quad \ldots \quad (1\,a)$$

dargestellt werden kann (z Windungszahl der Drossel, L auf den geradlinigen Teil der Magnetisierungskurve bezogene Eigeninduktivität).

Die obige Gleichung gilt für die statische Magnetisierungskurve. Für die Wechselstrommagnetisierungskurve wird die Gleichung

$$\tilde{i} = \frac{z}{L}\left(\tilde{\varphi} - \frac{3}{4}a\tilde{\varphi}^3 + \frac{5}{8}b\tilde{\varphi}^5\right) \quad \ldots \quad (1\,b)$$

abgeleitet, wobei $\tilde{i}$ den Maximalwert der Grundwelle des Magnetisierungsstroms und $\tilde{\varphi}$ den Maximalwert des Flusses bedeuten.

Durch Integration der Schwingungsgleichung

$$z\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

werden zunächst die freien Schwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises bestimmt. Die Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden: Die Drosselspulenspannung verläuft nach einer abgeflachten Sinuskurve, während die Kurvenform des die Drosselspulenwicklung durchsetzenden Flusses φ spitzer als die Sinuskurve ist. Durch Einsetzen der für φ erhaltenen Werte in die Gleichung (1a) ergibt sich der im Schwingungskreis fließende Strom, der eine außerordentlich spitze Kurvenform besitzt. Die Frequenz der Schwingungen ist keine konstante, sondern steigt mit wachsender Amplitude an. Die auftretenden Schwingungen können in eine Grundschwingung und eine unendliche Anzahl von Oberschwingungen zerlegt werden, doch darf man aber trotzdem nur von jeweils einer einzigen Eigenfrequenz des eisenhaltigen Schwingungskreises sprechen, da die Differentialgleichung des Problems keine lineare ist, so daß die verschiedenen Oberschwingungen nicht unabhängig von der Grundschwingung existieren können.

Anschließend daran wird das Verhalten des eisenhaltigen Schwingungskreises bei erzwungenen Schwingungen behandelt, welches grundverschieden von dem des gewöhnlichen Schwingungskreises ist. Die Resonanzspannungen des letzteren werden nur durch den Ohmschen Widerstand begrenzt und können daher unter Umständen sehr hohe Werte annehmen. Beim eisenhaltigen Schwingungskreis setzt zunächst die Eisensättigung einem unbegrenzten Anwachsen der Spannung ein Ziel, ferner ist die Eigenfrequenz stark mit der Höhe der Resonanzspannung veränderlich, so daß der Schwingungskreis, falls er sich einmal in Resonanz befunden hat, sich beim weiteren Anwachsen der Spannung wieder aus der Resonanzlage entfernt (er flieht sozusagen die Resonanz).

An einem Beispiel wird die graphische Ermittlung der Resonanzüberspannungen gezeigt. Wenn bei ungesättigtem Eisen Eigenfrequenz und erzwungene Frequenz gleich sind, tritt eine Spannungserhöhung in dem behandelten Fall überhaupt nicht auf. Ueberspannungen von mäßiger Höhe sind zu erwarten, wenn im ungesättigten Zustand die Eigenfrequenz kleiner ist als die erzwungene Frequenz. Es treten dabei, wie K. W. Wagner gezeigt hat,

drei Resonanzpunkte auf, von denen aber nur zwei stabilen Gleichgewichtslagen entsprechen.

Da die numerische Auswertung der entwickelten Formeln ziemlich umständlich ist, wird auf eine näherungsweise Berechnung der Resonanzüberspannungen hingewiesen, welche eine sehr gute Uebereinstimmung mit den Formeln der strengen Theorie ergibt. Noch bequemer ist das zum Schluß angegebene graphische Verfahren, welches die angenäherte Bestimmung der im widerstandlosen eisenhaltigen Schwingungskreis auftretenden Resonanzüberspannungen ermöglicht.

Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine im Parallelbetrieb. M. Liwschitz berechnet (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 96) für die Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen das Drehmoment während des Pendelns im Parallelbetrieb und den Einfluß der Anordnung der Dämpferwicklung (Käfigwicklung und Einzelpoldämpfung)) auf die Größe dieses Drehmoments. Um zu praktisch verwendbaren Formeln zu gelangen, wird die Streuung und die veränderliche magnetische Leitfähigkeit längs des Ankerumfangs berücksichtigt.

Scheibenförmige Wirbelstrombremse. Die Bremskraft der Wirbelstrombremse steigt anfänglich proportional der Drehzahl an; bei weiterer Steigerung der Drehzahl erreicht die Bremskraft ein Maximum (kritische Geschwindigkeit, kritische Bremskraft) und nimmt dann für größere Geschwindigkeiten wieder ab. Diese Erscheinung ist auf die Rückwirkung der Wirbelströme zurückzuführen. In einer Arbeit von W. Zimmermann (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 133) werden nun Formeln von Rüdenberg (Wirbelströmung berücksichtigt), Beckmann und Rogowski (Wirbelströmung vernachlässigt) für die scheibenförmige Wirbelstrombremse auf ihre Uebereinstimmung mit Versuchsergebnissen an einer Pasqualini-Bremse und an einer Siemens-Bremse verglichen. Die Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch sind recht beträchtlich, so daß die verschiedenen Formeln wohl nur mit großer Vorsicht für praktische Rechnungen zu gebrauchen sind.

Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchronmaschinen. J. Biermanns untersucht die beim falschen Parallelschalten von Synchronmaschinen auftretenden Kurzschlußvorgänge, welche die schwerste Beanspruchung der Maschine und der betroffenen Leitungsteile darstellen (Archiv für Elektrotechnik, X. Bd., S. 185). Um die mathematische Behandlung zu erleichtern, wird eine Zweiphasenmaschine von einfachster Bauart mit konstantem Luftspalt und verteilter Erregerwicklung vorausgesetzt, deren Ständer und Läufer lamelliert sind. Außerdem wird der Einfluß der magnetischen Sättigung und die Eisenverluste vernachlässigt. Im Anschluß an die theoretischen Ergebnisse werden auch die verschiedenen Schutz- und Vorbeugungsmaßnahmen einer kritischen Betrachtung unterzogen.

Die den zeitlichen Ablauf der Erscheinung beim falschen Parallelschalten charakterisierenden Gleichungen stimmen mit den vom Verfasser für den plötzlichen Kurzschlußstrom abgeleiteten Gesetzen (A. f. E., Bd. VI) überein. Die Größe der Ausgleichströme hängt selbstverständlich von der Phasenlage im Augenblick des Parallelschaltens ab. Beim Parallelschalten in richtiger Phasenlage treten überhaupt keine Ausgleichströme auf. Bei einer Phasenverschiebung α von 60^0 zwischen Netz- und Maschinen-EMK treten ebenso große Ströme wie beim plötzlichen Kurzschluß auf. Beim Parallelschalten in Phasenopposition werden die Ueberströme genau doppelt so groß als beim plötzlichen Kurzschluß (unendlich ergiebiges Netz vorausgesetzt). Aus der Tatsache, daß doppelte Ströme vierfache Kräfte auf die Wickelköpfe usw. zur Folge haben, während die modernen Maschinen, die beim plötzlichen Kurzschluß auftretenden Beanspruchungen gerade aushalten, folgt, daß die Maschinen dem ungehinderten Einfluß des falschen Parallelschaltens entzogen werden müssen. Hierfür kommen automatische Synchronisiereinrichtungen und Schutzreaktanzen in Frage. Der ausreichenden Dimensionierung der letzteren stehen aber die hohen Anschaffungskosten und die starke Einengung des Regulierbereichs der Generatoren im Wege. Mit dem als Schutzmittel empfohlenen Vorstufenschalter läßt sich dagegen nur eine bescheidene Schutzwirkung erzielen.

Die beim falschen Parallelschalten auftretenden Kontrastwirkungen zwischen Ständer und Läufer der Maschine sind denen beim plötzlichen Kurzschluß sehr ähnlich, nur tritt außerdem noch ein gewaltiges synchronisierendes Moment auf, das den Induktor nach dem Parallelschalten in seine richtige Lage relativ zum Vektor der Netz-EMK zu drehen sucht. Die für die resultierende Kontrastwirkung abgeleitete Gleichung setzt sich aus drei Summanden zusammen, von denen der erste der magnetischen Kraftwirkung zwischen den am Ständer und Läufer haftenden Anteilen des gemeinsamen magnetischen Feldes entspricht; der zweite Summand stellt das durch die Wicklungsverluste bedingte bremsende Moment und der dritte Summand das synchronisierende Moment dar. Weitaus den höchsten Wert kann der erste Summand erreichen, doch wechselt die Kontrastwirkung zwischen Ständer- und Läuferfeld ihre Richtung so schnell, daß sie fast vollkommen von der kinetischen Energie des Läufers aufgenommen wird und daher die Maschine nur verhältnismäßig wenig beansprucht. Das bremsende Moment wird am größten beim Parallelschalten in Phasenopposition und verschwindet beim Schalten in der Nähe des Synchronismus. Das synchronisierende Moment dagegen wird beim Paralle-

schalten im Synchronismus und in Phasenopposition gleich 0 und erreicht seinen größten Betrag für $\alpha = 90^0$.

In letzten Teil der Arbeit untersucht der Verfasser das Einschwingen des Läufers in die synchrone Lage unter Annahme eines kleinen Winkels α. Es ergibt sich dabei, daß bei nennenswerter Größe des Vorstufenwiderstandes der Läufer überhaupt nicht in die synchrone Lage einschwingt, sondern nach einer Reihe anschwellender Schwingungen vollständig außer Tritt fällt. Kafka. 181

KLEINE MITTEILUNGEN

Verhalten reziproker Kräftepläne bei Zerlegung des Fachwerkes. Für die Vorzeichen-Bestimmung der Stabspannungen in einem Cremonaschen Kräfteplan wird folgende Bemerkung zweckdienlich sein, da sie in einfacherer Weise, als es die meisten Lehrbücher tun, die Aufgabe zu lösen gestattet.

Wir denken uns, wie üblich, die äußeren Kräfte durch außerhalb des Fachwerks liegende, unendlich lange Druck- bezw. Zugstäbe ersetzt. Sollte einer oder der andere der so gedachten Kraftstäbe andere Stäbe des Fachwerkes oder andere Kraftstäbe schneiden, so werde der Kräfteplan gleich unter Heranziehung entsprechender Schurscher gedachter Knotenpunkte[1]) gezeichnet, um jede Unstimmigkeit auszuschalten.

Die allgemeinen Schnitte, durch die wir das Fachwerk zerlegen wollen und die den Gegenstand unserer Untersuchung bilden, sind sich selbst nicht überschneidende, sonst aber ganz beliebige geschlossene ebene Kurven, welche einen oder mehrere der Stäbe (Kraftstäbe) schneiden. Durch jeden solchen Schnitt wird das Fachwerk in zwei Teile geteilt, die jeder für sich im Gleichgewicht sein müssen. Unser Hauptsatz sagt nun folgendes aus: Für jeden in die Fachwerkebene gelegten »allgemeinen Schnitt« finden sich die beiden (geschlossenen, Pfeilfolge aufweisenden, sich voneinander nur im Pfeilsinne unterscheidenden) Gleichgewichtspolygone im reziproken Kräfteplan fertig vor und zwar so, daß die Kraftvektoren im Gleichgewichtspolygone die nämliche zyklische Reihenfolge aufweisen wie die der Reihe nach durch den Schnitt getroffenen Stäbe[2]).

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich aus folgender bekannter Eigenschaft (siehe z. B. Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, S. 218) reziproker Kräftepläne folgern: Die an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte folgen einander im Kraftplan in der nämlichen Reihenfolge, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunktes begegnet. Wenn man nun bedenkt, daß infolge der oben in anderem Zusammenhange schon gebrauchten Schurschen Erweiterung der Methode der reziproken Kräftepläne zwei sich kreuzende Stäbe stets einen »Knotenpunkt« gemeinsam haben, so sieht man sofort, daß zwei nacheinander folgende Stabschnittpunkte unseres Schnittes entweder einem und demselben Stabe, oder zwei im selben Knotenpunkt zusammenlaufenden Stäben angehören, woraus unter Heranziehung der oben angeführten Eigenschaft der reziproken Figuren unser Satz unmittelbar folgt.

Aus dem gewonnenen allgemeinen Satz läßt sich natürlich durch Spezialisierung die oben angewandte Eigenschaft rückgewinnen, indem man unseren allgemeinen Schnitt einfach um einen Knoten herumlegt, wie es auch bisher üblich war. Bemerkenswerter ist, daß auch die andere bekannte Haupteigenschaft der reziproken Kräftepläne sich als Spezialfall unseres Satzes erweist und somit statischen Sinn erhält. Diese Haupteigenschaft ist die folgende: Jedem geschlossenen, durch Stäbe nicht unter-

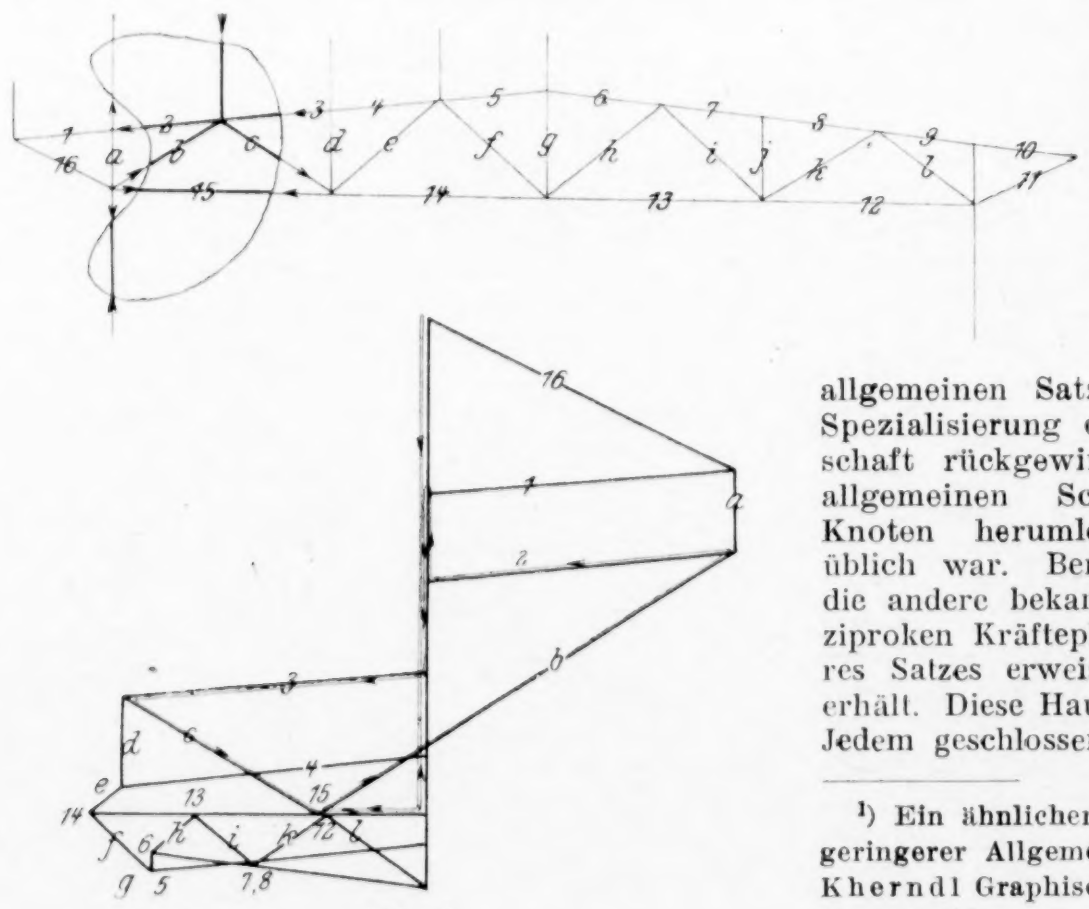


Abb. 1

[1]) Siehe z. B. L. Henneberg: Graphische Statik starrer Systeme, Leipzig 1911, oder F. Schur: Vorlesungen über graphische Statik, Leipzig 1915.

[1]) Ein ähnlicher Zusammenhang, aber von viel geringerer Allgemeinheit findet sich angedeutet in Kherndl Graphische Statik der Baukonstruktionen (ungarisch).

brochenen Polygonzuge der Fachwerkfigur entspricht im Kräfteplan ein Punkt. Um diesen Satz aus unserem allgemeinen Satz zu erhalten, muß man also den allgemeinen Schnitt so wählen, daß er bloß Stäbe eines und desselben nicht unterbrochenen ebenen Polygons schneidet (Abb. 2). Man sieht ohne weiteres, daß diese Bedingung identisch ist mit jener, daß der Schnitt jenen getroffenen Stab unmittelbar nacheinander 2 mal oder $2n$-mal schneiden muß, wo n eine ganze Zahl. Bei einem solchen Schnitte kehrt nämlich unser Gleichgewichtspolygon nach Erledigung eines Stabes immer wieder in denselben Punkt zurück und dieser Punkt ist eben der dem geschlossenen Polygon entsprechende Bildpunkt. In unserer Ausdrucksweise möchten wir also diese Haupteigenschaft wie folgt formulieren: Jedem solchen Schnitt, welcher unmittelbar nacheinander 2 mal, 4 mal ... oder $2n$-mal die einzelnen Stäbe der Fachwerkfigur trifft, entspricht im Kräfteplan ein konzentrischer Kraftbüschel.

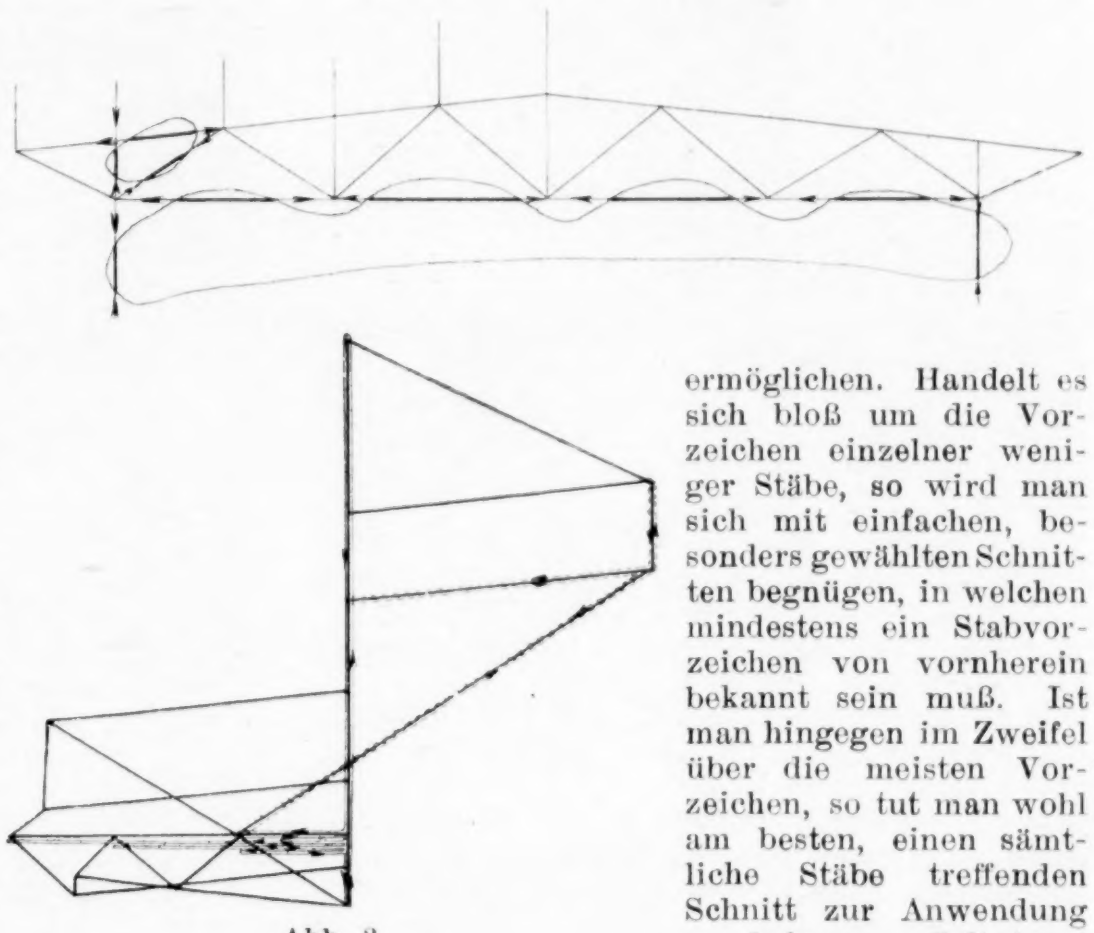


Abb. 2

In Abb. 3 ist ein solcher Schnitt gelegt, welcher sämtliche Stäbe des Fachwerkes trifft, so daß sich also der ganze Kräfteplan als Gleichgewichtspolygon in der in der Abbildung angedeuteten Weise deuten läßt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß all diese Eigenschaften geeignet sind, um in schwierigeren Fällen, wo keine der bekannten Faustregeln zur Vorzeichenbestimmung genügt, diese ohne von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorschreiten zu müssen, zu ermöglichen. Handelt es sich bloß um die Vorzeichen einzelner weniger Stäbe, so wird man sich mit einfachen, besonders gewählten Schnitten begnügen, in welchen mindestens ein Stabvorzeichen von vornherein bekannt sein muß. Ist man hingegen im Zweifel über die meisten Vorzeichen, so tut man wohl am besten, einen sämtliche Stäbe treffenden Schnitt zur Anwendung zu bringen. Selbstverständlich sind auch die bekannten Vorzeichenregeln der Füllungsstäbe in unserem Satze mit enthalten und lassen sich mit seiner Hilfe auch auf Fachwerke mit Zwischensystemen unschwer sinngemäß erweitern.

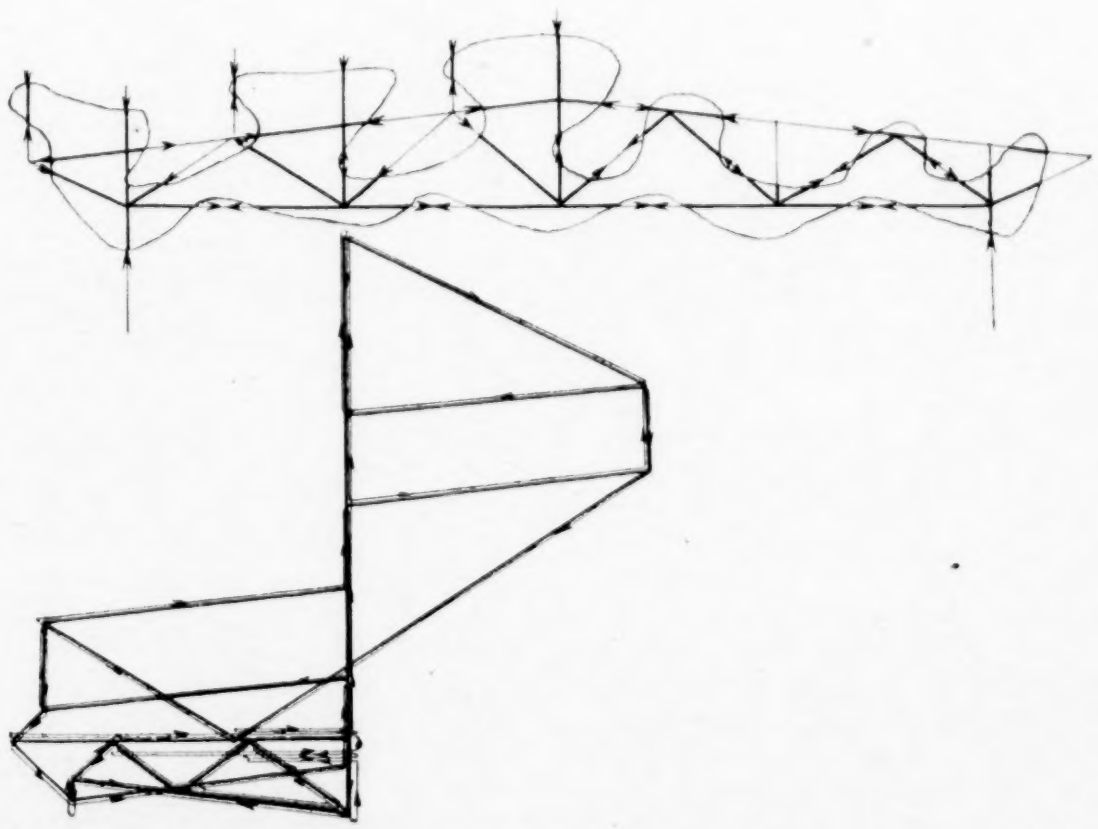


Abb. 3

Stettin. P. Neményi. 127

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. HILDA **GEIRINGER,** Die Gedankenwelt der Mathematik. Die Bücher der Arbeitsgemeinschaft, im Einvernehmen mit dem Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung herausgegeben von Dr. Werner Picht, Bd. 2. Verlag der Arbeitsgemeinschaft, Berlin und Frankfurt a. M. 1922. 199 S.

Das deutsche Schrifttum ist gewiß nicht reich an Büchern, die, ohne trivial oder unlesbar zu werden, zu dem Ganzen einer Wissenschaft Stellung zu gewinnen und diese darzulegen suchen. Ist ein solches Unternehmen schon in jedem Fall schwierig, so scheint es fast eine Unmöglichkeit gegenüber einer Wissenschaft, die wie die Mathematik sich dem Außenstehenden als ein ganz unzugängliches und undurchdringliches Geheimnis darstellt. Ja hier, wo der Eintritt in das Innere des Wissenschaftsgebiets Vorbereitungen von großer Gründlichkeit und Dauer erfordert, wird es schon zum Problem, was überhaupt sachlich gesagt werden kann ohne Benutzung der merkwürdigen Sprache und der Zeichen, deren Kenntnis dem Nichtmathematiker so völlig verschlossen ist.

Der Verfasserin, die die Anregung zu ihrer Arbeit wohl aus der Volkshochschulbewegung geschöpft hat, ist es nun in der Tat gelungen, ein vernünftiges und lesbares Buch zu schreiben, das über die Kreise hinaus, für die es ursprünglich gedacht war, Interesse beanspruchen darf. Sie beginnt mit einer kurzen Uebersicht über die Entstehung und erste Weiterbildung der Mathematik aus praktischen Gesichtspunkten heraus, wobei sie sich als eine treue und überzeugte Anhängerin Machs erweist. Von Machschen Ideen großenteils beherrscht ist auch der zweite, der Hauptteil des Buches, der den mathematischen Methoden gewidmet ist. Hier sucht die Verfasserin sehr richtig zwischen der »werdenden Wissenschaft« und dem zurzeit vorliegenden System der Mathematik zu unterscheiden; eine etwas schärfere Durchführung dieser Gegenüberstellung wäre wohl erwünscht und auch möglich gewesen. Die gegenwärtige Mathematik erscheint im Sinne Machs als ein Gebäude, das aus ursprünglich äußeren Erfahrungsinhalten durch allmähliche Abstraktion geschaffen, durch immer schärfer werdende Kritik befestigt, schließlich mittels konsequent durchgebildeter Axiomatik ökonomisch und wohnlich eingerichtet wurde. An dem Beispiel der Geometrie, deren Grundbegriffe und deren logische Möglichkeiten in den letzten Jahrzehnten besonders eingehend durchforscht worden sind, wird dieser Gedankengang in dem Buch breit ausgeführt. Die Geometrie bildet ja auch bei Mach und fast überall, wo von den Grundlagen der Mathematik die Rede ist, den bevorzugten Gegenstand der Betrachtung. Die Frage muß aufgeworfen werden, ob man damit wirklich das spezifisch Mathematische erschöpft, oder nicht viel eher nur den der Mathematik am nächsten stehenden Zweig der Naturwissenschaft behandelt? Auffallend ist es zumindest, daß man für das Gesamtgebiet der Geometrie in dem berühmten Erlanger Programm von Klein ein durchgreifendes Einteilungsprinzip besitzt, wie es für jedes naturwissenschaftliche Teilgebiet mit klar umgrenztem stofflichen Inhalt selbstverständlich ist, während es kaum gelingen dürfte, Aehnliches etwa für den heutigen Problemkreis der Analysis zu leisten.

Auf sicherere und für den größeren Leserkreis gewiß verständlichere Gebiete führen die Bemerkungen über die Anwendungen und die praktischen Leistungen der Mathematik. Ob die Rolle, die hier der Kleinschen Unterscheidung zwischen Präzisions- und Approximationsmathematik zugeschrieben wird, berechtigt ist, muß freilich dahingestellt bleiben. Sehr vernünftig ist die im Buche deutlich betonte Notwendigkeit der Beschränkung der Anwendungen auf solche Fragen, in denen die quantitative Betrachtungsweise, also die Mathematik, am Platze ist; in der Tat schadet nichts dem Ansehen der Mathematik so sehr wie das häufig auftretende Bestreben, ihre Formen und Verfahren auf Gebieten zur Geltung zu bringen, für die sie nicht geeignet sind. Noch einmal wendet sich der Gedankengang der abstrakten philosophischen Seite zu in dem Schlußabschnitt über die »Bedeutung der reinen Mathematik«. Hier bekennt die Verfasserin, daß sie neben den Machschen biologisch-ökonomischen Wurzeln der Wissenschaft für das Entstehen der Mathematik auch das Vorhandensein psychischer Voraussetzungen annimmt, deren Erforschung und Aufklärung sie sich von einer Anwendung psychoanalytischer Methoden (!) verspricht. Ein kurzer Anhang behandelt didaktische Fragen, hauptsächlich den Unterricht in der Volkshochschule betreffend, woran sich noch ein ausführliches Verzeichnis einschlägiger Werke knüpft. — Dem Verlag kann ich den Vorwurf nicht ersparen, daß er das Buch mit einer großen Zahl sinnstörender Druckfehler hat erscheinen lassen.

Zusammenfassend wird man sagen dürfen, daß das Werkchen, wenn man auch da und dort etwas klarere und reifere Urteile wünschen würde, eine schöne Leistung darstellt, eine originelle und erfreuliche Bereicherung der Literatur, wert der Beachtung, wert der Verbreitung und vor allen Dingen: wert gelesen zu werden. Mises. 178

Dr. GEORG **SCHEFFERS,** o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden. Erster Band mit 404 Abbildungen im Text. Berlin 1919, Julius Springer. IX + 423 S.

Scheffers Buch, von dem hier zunächst der erste Band besprochen werden soll, ist als eine wertvolle Bereicherung der Literatur

über darstellende Geometrie zu bezeichnen. Der Verfasser weiß dem viel behandelten Stoffe mannigfache, neue Seiten abzugewinnen, die Darstellung verhindert Klarheit und Sorgfalt mit mathematischer Strenge und ist eingehend und ausführlich, ohne doch in Weitschweifigkeit sich zu verlieren, die Abbildungen genügen in bezug auf Ausführung und Bildwirkung allen Ansprüchen, zahlreiche historische Notizen mit den genauen Lebensdaten der einzelnen Forscher bieten eine sehr dankenswerte Beigabe. Das ganze Buch wird getragen von dem Geiste einer geometrischen Anschaulichkeit, wie er in unserer fast nur noch analytisch denkenden Zeit sympathisch zu begrüßen ist. Das Buch kann dem Mathematiker und auch dem Techniker empfohlen werden, der vor einer strengen Darstellung nicht zurückschreckt. Von den anderen bekannten Lehrbüchern über darstellende Geometrie unterscheidet sich das vorliegende Werk nach der vom Verfasser selbst ausgesprochenen Ansicht dadurch, daß es die Projektion in einer Tafel, sowohl die orthogonale wie die schiefe, ausführlich erörtert, bevor zum Zweitafel-System übergegangen wird. Dementsprechend ist mehr als die Hälfte dieses Bandes, nämlich 245 Seiten, der Projektion in einer Tafel gewidmet. Der Berichterstatter stimmt mit dem Verfasser darin überein, daß er es ebenfalls für pädagogisch richtig hält, mit der Projekiton in einerr Tafel zu beginnen, doch glaubt er, daß es genügt, diese kotierte Projektion nur soweit zu behandeln, daß sie für das Zweitafel-System vorbereitet. Man hat dann später immer noch die Möglichkeit, die eine oder andere Aufgabe bloß in einer Tafel durchzuführen.

Im einzelnen gliedert sich der Inhalt des ersten Bandes wie folgt. An die Behandlung der Grundbegriffe der senkrechten Projektion schließt sich ein Abschnitt über Dächer; hier wird in beachtenswerter Weise das mathematische Problem von dem der Dachausmittlung geschieden. Betrachtungen über einfache Böschungsflächen und Böschungskörper, sowie über Sonnenuhren führen über zur rechtwinkligen Axonometrie. Sodann wird der Begriff des quadratischen Momentes eingeführt, der aus dem Trägheitsmoment der Mechanik sich ergibt, wenn man die in den einzelnen Punkten konzentrierten Massen alle gleich der Einheit nimmt und er liefert ein Kennzeichen dafür, wann drei durch einen Punkt gehende Strecken die Projektion dreier durch eine Ecke gehender Würfelkanten sind. An einige Bemerkungen über regelmäßige Körper und Kristalle schließt sich eine längere Betrachtung der Ellipse, die als senkrechte Projektion des Kreises eingeführt wird; es gelangt auch die Momentenellipse zur Besprechung, welche der Culmannschen Trägheitsellipse ähnlich ist. Das 2. Kapitel behandelt die Kavalierperspektive, welche sodann zur Konstruktion der Schatten in Parallelbeleuchtung verwendet wird. Hier müßte der rein abstrakte Charakter der Parallelbeleuchtung, welche man bei technischen Zeichnungen ganz allgemein benutzt, schärfer betont werden; sie darf nicht, wie es S. 140 geschieht, mit der Beleuchtung durch die Sonne identifiziert werden. Nachdem sodann die Affinität und ihre Anwendungen besprochen, wird in bemerkenswerter Weise (§ 5) die freie Parallelprojektion behandelt. Daran schließt sich die allgemeine Axonometrie (Pohlkescher Satz) sowie ein Abschnitt aus der neueren Geometrie (harmonische Elemente, Involution).

Nun wendet sich die Darstellung der Projektion in zwei Tafeln zu. Erwähnung verdient § 3 (S. 292), in dem verschiedene Aufgaben aus der Geometrie des Raumes teilweise sehr originell gelöst werden. So bereitet der Verfasser die Betrachtung der abwickelbaren Fläche dadurch vor, daß er (S. 304) vorher eine Folge von Winkelfeldern und ihre Abwicklung darstellt. Von krummen Gebilden finden der Umdrehungskegel und der Umdrehungszylinder, sowie der allgemeine Kegel und der elliptische Zylinder Behandlung. Merkwürdig ist es, daß für den schiefen Kreiskegel und für den schiefen Kreiszylinder gerade die einfachsten Methoden der Abwicklung nicht erwähnt sind. Verschentlich wird mehrmals beim schiefen Kreiskegel die Linie, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, als Kegelachse bezeichnet (S. 346, 372, 373, 375). Sodann werden die Kegelschnitte behandelt. In einfacher Weise wird (S. 372) gezeigt, daß auch der schiefe Kreiskegel keine anderen ebenen Schnitte liefert wie der gerade Kreiskegel. Schattenkonstruktionen in Grund- und Aufriß, sowie eine nochmalige Erörterung der rechtwinkligen Axonometrie bilden den Schluß.

München, Januar 1922

Karl Doehlemann. 150

Professor P. B. **FISCHER,** Berlin-Lichterfelde, Einführung in die darstellende Geometrie. Mit 59 Abbildungen im Text, 90 Seiten. Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 541. Leipzig u. Berlin 1921, B. G. Teubner.

Der Verfasser behandelt in einer sehr guten, alles wesentliche berücksichtigenden und vielfach originellen Darstellung die senkrechte Projektion auf eine Tafel, dann ganz kurz die Zentralprojektion (freie Perspektive) und sodann die Mongesche Zweitafelmethode. Erledigt werden die Grundaufgaben, sowie einfache Schnitte mit Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln. Kleine, aber doch genügend deutliche Abbildungen sind diesem Abschnitt beigegeben. Dagegen hat sich der Verfasser, wohl durch die mißlichen äußeren Verhältnisse beeinflußt, verleiten lassen, bei der Projektion auf eine Tafel mit den Abbildungen zu sparen. Es ist aber ganz undenkbar, daß man etwa bei dem Begriff der Projektion oder bei der Umlegung einer Ebene oder bei der Aufgabe, den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene zu zeichnen, auf die Abbildung verzichten und sich mit einer Beschreibung begnügen kann. Paradox ausgedrückt könnte man eher auf den

Text als auf die Abbildung verzichten. Abb. 29 enthält ein kleines Versehen. Bei den Anwendungen des Pohlkeschen Satzes (S. 76) wäre, um Mißverständnisse zu vermeiden, darauf hinzuweisen, daß die betreffenden Parallel-Perspektiven nicht das durch Grund- und Aufriß gegebene Objekt, sondern ein dazu ähnliches wiedergeben.

München, Dezember 1921.

Karl Doehlemann. 139

NACHRICHTEN

Versammlung in Leipzig September 1922. Für die in der dritten Septemberwoche stattfindende Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte sind bisher die folgenden Vorträge aus dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik angemeldet (in alphabetischer Reihenfolge):

E. Artin-Göttingen: Ueber einen Fall von geodätischen Linien mit quasiergodischem Verlauf.

L. Hopf-Aachen: Messung der hydraulischen Rauhigkeit.

A. Nâdai-Göttingen: Theorie der Plattenbiegung und ihre experimentelle Bestätigung.

H. Reißner-Charlottenburg: Spannungsverteilung in offenen Zylinderschalen.

C. Runge-Göttingen: Graphische Methoden der Bahnbestimmung von Planetoiden.

W. Schachenmeier-München: Neuere Nietversuche.

L. v. Schrutka-Brünn: Ueber die reduzierten Fehlergleichungen.

W. Sternberg-Heidelberg: Ueber Randwertaufgaben der mathematischen Physik.

E. Trefftz-Aachen: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.

E. Waelsch-Brünn: Analysen des drei- und des vierdimensionalen Vektorraumes.

Diese Vorträge werden voraussichtlich am Donnerstag, den 21. September in einer Vor- und Nachmittagssitzung der Abteilung I (Reine und angewandte Mathematik) gehalten werden, soweit sie nicht der Abteilung III (Angewandte Physik) überwiesen werden.

Der im Vorjahre eingesetzte Vorbereitungsausschuß bestehend aus den Herren v. Mises, Prandtl und Reißner hat an die Fachvertreter an den deutschen Technischen Hochschulen ein Rundschreiben versandt, in dem zur Anmeldung von Vorträgen und zur Teilnahme an der Versammlung aufgefordert wird. Jeder der Genannten nimmt Anmeldungen von Vorträgen entgegen. Erwünscht sind in erster Reihe Mitteilungen über eigene Forschungsergebnisse auf einem der einschlägigen Gebiete.

Neuordnung an den Technischen Hochschulen Preußens. Die seit langem im Gange befindlichen Reformen an den Preußischen Technischen Hochschulen sind nunmehr durch einen Erlaß des zuständigen Ministeriums über die Schaffung von »Fakultäten« und die Neuordnung der Diplomprüfungen zu einem gewissen Abschluß gelangt. Die bisherigen sechs bis acht Abteilungen der einzelnen Technischen Hochschulen werden zu vier Fakultäten zusammengefaßt und zwar zu einer Fakultät für »allgemeine Wissenschaften«, einer Fakultät für »Bauwesen«, einer Fakultät für »Maschinenwirtschaft« und einer Fakultät für »Stoffwirtschaft«. Damit soll vor allem der scharfen Trennung, die in der Ausbildung zu den Fachrichtungen zur Geltung kam, entgegengearbeitet werden. — Gegenüber den starren bisherigen Unterrichts- und Prüfungsplänen der einzelnen Abteilungen tritt nach der neuen Diplomprüfungsordnung bedeutend größere Freiheit, indem der einzelne Studierende berechtigt ist, eine Zusammenstellung von Prüfungsfächern ganz frei zu wählen und sie zwei Semester vor Ablegung des Examens der Fakultät zur Genehmigung vorzulegen. Allerdings werden in einem Anhang der Diplomprüfungsordnung bestimmte Zusammenstellungen, die einer besonderen Genehmigung nicht mehr bedürfen, angeführt. Unter diesen interessieren uns hauptsächlich die beiden an letzter Stelle stehenden für die »Fachrichtung Physik« und »Fachrichtung Mathematik«. Es war ein lange von einsichtigen Technikern angestrebtes Ziel, die Möglichkeit zu schaffen, daß einzelne hierfür besonders veranlagte Studierende eine weitergehende theoretische Ausbildung erfahren und sie beim Examen verwerten können. Diesem Gesichtspunkt ist nunmehr durch die neue Diplomprüfungsordnung reichlich Rechnung getragen. Sie gibt für die Fachrichtung Mathematik folgende Zusammenstellung von Lehrfächern bezw. Prüfungsgegenständen: A. für die Vorprüfung. Uebungsergebnisse: 1. Reine Mathematik. 2. Darstellende Geometrie. 3. Physik. 4. Mechanik einschließlich graphischer Statik. 5. Mathematisches Praktikum. 6. Vermessungskunde oder Astronomie oder Festigkeitslehre oder politische Arithmetik (in Uebereinstimmung mit Ziffer 6 der mündlichen Prüfung). Mündliche Prüfung: 1. Reine Mathematik. 2. Angewandte Analysis. 3. Darstellende Geometrie. 4. Mechanik. 5. Experimentalphysik. 6. Vermessungskunde oder Astronomie oder Festigkeitslehre oder politische Arithmetik (nach Wahl, jedoch in Uebereinstimmung mit Ziffer 6 Vorprüfung-Uebungsergebnisse). B. Hauptprüfung. Uebungsergebnisse: I. Pflichtfächer: 1. Nachweis der Teilnahme am Mathematischen Seminar. 2. Praktische Mathematik oder Versicherungsmathematik. 3. Theoretische Physik oder aus einem Gebiete der Technik. II. Wahlfächer: 4. Aus dem technischen Wahlfach der münd-

lichen Prüfung. Mündliche Prüfung: I. Pflichtfächer: 1. Sondergebiete der reinen Mathematik. 2. Angewandte Mathematik oder Versicherungsmathematik. 3. Theoretische Physik. II. Wahlfächer: 4. Mindestens ein Fach aus dem Gebiet der Technik oder der Volks- und Privatwirtschaftslehre.

Für die Fachrichtung Physik wird ein ähnlich aufgebauter Plan gegeben, der in der Vorprüfung Uebungsergebnisse hauptsächlich aus dem chemischen Laboratorium, dem elektrotechnischen oder Maschinen-Laboratorium und Vorlage von einfachen Zeichnungen aus dem Gebiete des Maschinenbaues oder der darstellenden Geometrie verlangt; in der mündlichen Prüfung anorganische Chemie, Grundzüge der Elektrotechnik und der beschreibenden Maschinenlehre; endlich in der Hauptprüfung fordert: Uebungsergebnisse I. Pflichtfächer: 1. Allgemeine Physik und physikalische Chemie. 2. Theoretische Physik oder höhere Mechanik oder theoretische Elektrotechnik oder theoretische Wärmelehre. II. Wahlfächer: 3. Aus mindestens einem Wahlfache der mündlichen Prüfung. Mündliche Prüfung. I. Pflichtfächer: Uebungsergebnisse aus den Wahlfächern. 1. Allgemeine Physik einschließlich physikalischer Chemie. 2. Theoretische Physik oder höhere Mechanik oder theoretische Elektrotechnik oder theoretische Wärmelehre. 3. Reine oder angewandte Mathematik oder Chemie. II. Wahlfächer: 4. Mindestens ein technisches Fach.

Die Lehr- und Prüfungspläne allein können natürlich nicht ausreichen, um die Entwicklung wie sie gewünscht wird, sicher zu stellen. Man muß hoffen, daß durch verständnisvolles Zusammenwirken der Dozenten, der Studierenden und der Behörden das Ziel, der Industrie gründlich theoretisch durchgebildete Ingenieure zuzuführen, erreicht werden wird.

Praktische Verwendung der Nomographie. Der Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung der beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit in Industrie und Handwerk besteht, hat seit längerer Zeit die Nomographie in sein Arbeitsgebiet einbezogen und bereits eine große Anzahl von Rechentafeln herausgegeben, die in der Industrie Anklang gefunden haben. Um weitere Klärung über die Anwendung der Nomographie und die Möglichkeit der weiteren Ausnutzung dieses Hilfsmittels auf noch nicht bearbeiteten Gebieten herbeizuführen, ist vor kurzem beim Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung ein »Arbeitsausschuß für graphische Rechenmethoden« gegründet worden, in dem Herr Dipl.-Ing. Winkel, Berlin, den Vorsitz übernommen hat. Die Durchführung der Arbeiten ist so gedacht, daß die Fragen von einzelnen Mitarbeitern in zusammenfassenden Berichten vorgetragen werden und in einer darauf folgenden Aussprache die Ansicht der übrigen Ausschußmitglieder zum Ausdruck gebracht wird. Außerdem soll laufend über die neu erschienene Literatur, die augenblicklich in verschiedenen Zeitschriften verstreut ist, Bericht erstattet werden. Die Mitarbeit im Ausschuß ist ehrenamtlich. Die Beiträge, die von den einzelnen Mitarbeitern auf Anregungen des Ausschusses geleistet werden, z. B. Vorträge, Ausarbeiten von Rechentafeln usw., bleiben ihr geistiges Eigentum.

Den Arbeiten des Ausschusses, der mit seiner Tätigkeit dazu beitragen will, den in der Praxis arbeitenden Ingenieuren Hifsmittel für ihre rechnerischen Arbeiten zu schaffen, kann man nur recht reichen Erfolg wünschen.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Bezeichnungen für Vektorgrößen.[1]) Zu dem in dieser Zeitschrift 1, 1921, S. 421 bis 422 veröffentlichten Entwurf XX des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen sei folgendes bemerkt:

1. Die Festsetzung von gothischen Buchstaben für Vektoren verstößt gegen die Regel, daß Formelzeichen möglichst so gewählt werden müssen, daß sie für internationale Verwendung in Betracht kommen können. Dies ist nun bei den gothischen Buchstaben nicht der Fall. Es mag in Deutschland wohl weniger bekannt sein, daß den Ausländern, die nicht Mathematiker, Physiker oder Sprachgelehrte sind, die gothischen Buchstaben, besonders die geschriebenen Zeichen, sehr wenig geläufig sind. Auch besitzen die meisten ausländischen Druckereien nur eine sehr geringe Anzahl gothischer Typen. Es ist also durchaus ausgeschlossen, daß jemals die gothische Schrift für Vektoren allgemeine Verwendung finden könnte. Dagegen verfügen alle Druckereien über fette lateinische Buchstaben, entweder vertikale oder schräge (Italien). Es sei also die fette vertikale oder schräge Schrift für alle Größen mit mehreren Bestimmungszahlen angenommen, in der Handschrift verwende man dazu einen Strich über dem Buchstaben. Die Bezeichnung von Vektoren durch griechische Buchstaben soll überhaupt vermieden werden, da meistens keine deutlich fetten griechischen Typen vorhanden sind und es in einem Buche sehr störend wirkt, wenn eine und dieselbe Größenart das eine Mal durch fetten Druck, das andere Mal durch Ueberstreichen gekennzeichnet wird. Die überstrichenen griechischen Buchstaben sind übrigens zu einem anderen Zweck nötig (vergl. 5). Eine Schwierigkeit entsteht, wo durch früheren Beschluß ein griechischer Buchstabe für einen Skalar festgelegt ist, z. B. ω für

[1]) Vgl. a. die Zuschriften von L. Prandtl, L. Schrutka und C. Boehm, ds. Zeitschr. 2, 1922, S. 161 bis 164.

die Winkelgeschwindigkeit. Diese Schwierigkeit läßt sich beseitigen, indem man zwar für den Winkelgeschwindigkeitsvektor einen lateinischen Buchstaben festsetzt, z. B. **u** (nach Föppl) oder **w** (ähnelt ω), neben *u* und *w* aber auch die Bezeichnung ω für den Betrag des Vektors zuläßt. Etwas ähnliches geschieht ja auch bei den Bestimmungszahlen des Radiusvektors **r**, die auch durch *x, y* und *z* angedeutet werden dürfen.

Es empfiehlt sich ferner, die skalaren Größen im allgemeinen mit schrägen lateinischen oder griechischen Buchstaben zu bezeichnen und die vertikalen Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten, Geraden und Ebenen zu verwenden. Eine Regel ohne Ausnahme darf hier aber nicht aufgestellt werden, da der Autor die Freiheit behalten muß, bestimmte Gruppen von skalaren Größen durch vertikalen Druck hervorzuheben.

2. Zur Bezeichnung des Betrages eines einzelnen Vektors **a**, **A** verwende man stets den korrespondierenden schrägen Buchstaben, *a, A*, und nur in Verbindungen zwei vertikale Striche, z. B. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$. Letztere Bezeichnung ist doch für den allgemeinen Gebrauch viel zu schwerfällig.

3. Die Bezeichnung $\mathbf{a}^0$ für den zu **a** gehörigen Einheitsvektor, die sich nur auf eine sehr entfernte Analogie berufen kann, ist nicht nur irreführend, sondern direkt falsch. Jeder Vektor kann als Quaternion mit Skalarteil Null aufgefaßt werden und in der Quaternionenrechnung, wo bekanntlich die Potenzierung eines Vektors Bedeutung hat, ist daher $\mathbf{a}^0 = 1$. Es ist nun gar kein Grund vorhanden, für den Einheitsvektor gerade eine Bezeichnung zu wählen, die schon eine vollkommen bestimmte andere Bedeutung hat. Nur die Schreibweise $\mathbf{a}_I$ ist zu empfehlen, da $\mathbf{a}_1$ für andere Zwecke nötig ist (vergl. 11) und die 0 in $\mathbf{a}_0$ überhaupt keine Bedeutung hätte, der Index 0 überdies oft zur Andeutung von Initialwerten nötig ist.

5. 6. Mit der Festsetzung des skalaren Produktes: $ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$ statt $-ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$ nimmt man den alten Gibbsschen Standpunkt ein, der sich wissenschaftlich als unhaltbar und dazu praktisch als sehr unzweckmäßig erwiesen hat. Es dürfte bekannt sein, daß Gibbs, als er das Hamiltonsche quaternionische Produkt in zwei Teile zerlegte und diese richtig als selbstberechtigte Produkte erkannte, leider in ganz unberechtigter und durchaus unbegründeter Weise das richtige Hamiltonsche Minuszeichen in ein Pluszeichen verwandelt hat. Die Schüler Hamiltons haben sich damals vergeblich bemüht, den Vektoranalytikern das Unberechtigte dieses Ansatzes kar zu machen, es war das auch unmöglich, solange man glaubte, daß Zahlensysteme nur probierenderweise durch einen guten Griff zu Stande kommen könnten. Es hat sich aber später gezeigt, daß eine direkte Analysis für irgend welche geometrischen Größen genau auf gruppentheoretischem Wege berechnet werden kann, sobald die Größen vollkommen definiert sind. Es rührt dieses daher, daß nach dem von F. Klein 1872 gefundenen Klassifizierungsprinzip jede geometrische Größe zu einer ganz bestimmten Transformationsgruppe gehört, und daß sie ohne Angabe der zugehörigen Gruppe überhaupt nicht exakt definiert werden kann. Ist die Gruppe aber gegeben, so läßt sich auch das zugehörige Zahlensystem, das vollständig von der Gruppe abhängt, direkt berechnen. Führt man dies aus für die Gruppe der Drehungen in drei Dimensionen, so entsteht die gewöhnliche Vektoranalysis, und zwar mit dem Minuszeichen im skalaren Produkt[1]). Für höhere Dimensionenzahlen lassen sich in derselben Weise und ebenso einfach direkte Analysen bilden, die alle analog gebaut sind und so ineinander passen, daß jede höhere sämtliche niederen in sich enthält[2]).

Durch Zerlegung der bei dieser Rechnung zunächst auftretenden stets assoziativen Multiplikationen entstehen $n-1$ Teilmultiplikationen. Werden in dem gefundenen Systeme alle Größen gestrichen, die bei der speziellaffinen Gruppe zerstört werden, so entsteht eine Analysis, die bis auf einige Vorzeichenwechsel mit der Graßmannschen Ausdehnungslehre übereinstimmt[3]). Für den Mathematiker würden nun schon diese wenigen Tatsachen genügen, die dreidimensionale Vektoranalysis mit dem $--$-Zeichen als die von wissenschaftlichem Standpunkte einzig richtige zu erkennen. Der Praktiker verlangt aber noch mehr, er will wissen, was ihm die Wiedereinführung des $--$-Zeichens für direkte Vorteile bei der Rechnung bringt. An erster Stelle ist da die Tatsache zu erwähnen, daß infolge des zu Anfang fälschlich eingeführten $+$-Zeichens die ganze Vektoranalysis von $--$-Zeichen durchspickt wird, die in der unübersichtlichsten Weise verteilt sind. Es ist denn auch in der Gibbsschen Vektoranalysis durchaus unmöglich, eine allgemeine Regel zum Ausschreiben von Produkten von mehr als drei Faktoren anzugeben; für diese Produkte hat man immer Tabellen zu verwenden oder man muß die Formel, ausgehend von den drei Hauptregeln für Produkte von drei Vektoren stets aufs neue ableiten. Schon eine dieser Hauptregeln: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{b}$ (Gibbs) macht dem Anfänger, der immer wieder die Stelle des $--$-Zeichens falsch behält, Schwierigkeiten, wie ja jeder, der Vektoranalysis doziert hat, hinlänglich erfahren hat.

Nun liegt dies nur an dem $+$-Zeichen. Bei Verwendung des richtigen $--$-Zei-

---

[1]) Zum erstenmal ausgeführt in meinen »Grundlagen des Vektor- und Affinoranalysis« Leipzig 1914.

[2]) Ausführlich dargestellt in »Die Zahlensysteme der geometrischen Größen« Nieuw Archief voor Wiskunde 13 (1919) S. 141 bis 156, 249 bis 266.

[3]) Graßmann trifft kein Vorwurf. Da er von einer anderen Gruppe ausging (der linearen homogenen) konnte er unmöglich vorhersehen, daß sein System durch Vorzeichenänderungen, die wesentlich der orthogonalen Gruppe entstammen, bedeutend, in den komplizierten (Müllerschen) Formeln sogar ganz bedeutend, vereinfacht werden konnte.

chens lassen sich sämtliche Produkte mit mehr als drei Faktoren, sowie die erwähnte Hauptregel ohne Tabellen und ohne Gedächtnisarbeit sofort ausschreiben.

Dies soll gezeigt werden. Nennen wir Produkte der Form $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ Hauptprodukte. Hauptprodukte mit mehr als drei Faktoren kommen in der dreidimensionalen Vektoranalysis nicht vor. Ein Hauptprodukt mit i Faktoren läßt $i!$ Anordnungen der Faktoren zu, davon für $i>1$ die Hälfte mit dem $+$-Zeichen, die andere Hälfte mit dem $-$-Zeichen. Jede solche Anordnung heiße eine Permutation, z. B. $\mathbf{abc}$, $\mathbf{bca}$, $\mathbf{cab}$, $-\mathbf{acb}$, $-\mathbf{bac}$, $-\mathbf{cba}$.

Wir definieren nun die Begriffe erste, zweite und dritte Ueberschiebung zweier Permutationen.

Die erste Ueberschiebung zweier Permutationen, z. B. $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{de}$ werde erhalten, indem die beiden benachbarten Faktoren, hier $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$, ein skalares Produkt bilden (mit dem $-$-Zeichen definiert), die anderen in der bestehenden Reihenfolge ein Hauptprodukt, also $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{e}$.

Die zweite Ueberschiebung entstehe, indem zuerst die beiden benachbarten, sodann die beiden nächsten ein skalares Produkt bilden, und die übrigen ein Hauptprodukt, also hier $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{e})\,\mathbf{a}$.

Die dritte Ueberschiebung entstehe, indem nacheinander drei skalare Produkte gebildet werden. Für $\mathbf{abc}$ und $\mathbf{def}$ also: $(\mathbf{c}\,.\,\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{e})\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{f})$.

Es gilt nun die einfache Regel:

Das skalare Produkt zweier Hauptprodukte, das nicht selbst wieder Hauptprodukt ist (also nicht $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$), entsteht durch Summierung der höchsten Ueberschiebungen sämtlicher Permutationen der beiden Faktoren, wobei alle mehrfach auftretenden Produktbildungen einfach zu zählen sind. Für das vektorische Produkt gilt das gleiche in bezug auf die **ersten** Ueberschiebungen.

Man schreibt also z. B. direkt ohne Gedächtnisarbeit und ohne Tabellen an:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\times\mathbf{d}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\times\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}\times\mathbf{d}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

$$\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}\,\mathbf{d}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c}\times\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

Erst durch diese Ueberschiebungsregel[1]) wird die Vektoranalysis ein ebenso brauchbares Instrument wie die gewöhnlich Algebra, die sich ja ebenfalls ohne Tabellen verwenden läßt. Besonders bei den Differentiationsformeln ist die Ueberschiebungsregel nützlich. Man schreibt z. B. sofort an:

[1]) Zuerst veröffentlicht »Arch. der Math. und Physik« 25 (1916) S. 243 bis 260.

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\nabla_I)\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{a}\times\nabla_{II})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\nabla\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}-\{(\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{a}+\{(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{d}\}\cdot\mathbf{a}-(\nabla\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Sämtliche Umformungen mit ∇ werden in derselben Weise spielend leicht erhalten ohne Rechnung und ohne daß man irgend eine Formel zu behalten oder nachzuschlagen hätte.

An zweiter Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die Multiplikation $\dot\times=\cdot+\times$, die quaternionische Multiplikation, bei Verwendung des $-$-Zeichens die assoziative Eigenschaft bekommt und mit Hülfe dieser Eigenschaft sich viele Rechnungen bedeutend kürzer und eleganter gestalten. Die Schraubachse der Bewegung eines starren Körpers berechnet sich z. B. folgendermaßen. Es sei:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}\times\mathbf{r}$$

die Gleichung der Bewegung. Für einen Punkt der Schraubachse ist $\mathbf{v}\parallel\mathbf{w}$, also:

$$\mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r})=\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}.$$

Nun ist jedenfalls

$$\mathbf{w}\,(\mathbf{w}\,.\,\mathbf{r})=\lambda\,\mathbf{w},$$

wo λ ein unbekannter Parameter ist. Addition ergibt:

$$\mathbf{w}\mathbin{\dot\times}(\mathbf{w}\mathbin{\dot\times}\mathbf{r})=(\mathbf{w}\mathbin{\dot\times}\mathbf{w})\mathbin{\dot\times}\mathbf{r}=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{r}=-w^2\mathbf{r}=\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}+\lambda\,\mathbf{w},$$

oder

$$\mathbf{r}=-\frac{1}{w^2}\,(\mathbf{v}_0\times\mathbf{w}+\lambda\,\mathbf{w}).$$

In derselben Weise bestimmt man die Zentralachse eines Systems von Kräften[1]).

Die Multiplikationstabelle der quaternionischen Multiplikation ist:

↗	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	-1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	-1	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	-1

Die wichtigste Eigenschaft nach der assoziativen ist, daß ein quaternionisches Produkt von reellen Faktoren nur Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist. Es existieren demzufolge zwei eindeutige Divisionen.

Zerlegung von $\nabla\mathbin{\dot\times}\nabla\mathbin{\dot\times}\mathbf{v}$ ergibt in der einfachsten Weise den Hauptsatz des zweiten Differentialquotienten:

$$\nabla^2\cdot\mathbf{v}=(\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=(\nabla\mathbin{\dot\times}\nabla)\mathbin{\dot\times}\mathbf{v}=\nabla\mathbin{\dot\times}(\nabla\mathbin{\dot\times}\mathbf{v})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\text{grad conv }\mathbf{v}+\text{rot rot }\mathbf{v}.$$

Es verdient Beachtung, daß die $-$-Zeichen, die in der Gibbsschen Vektoranalysis bei der

[1]) Es wäre ein Irrtum zu meinen, daß nur das skalare Produkt mit dem $+$-Zeichen sich zu Anfang der Vektoralgebra in plausibler Weise an Hand der Formel für die Arbeit einer Kraft definieren läßt. Für den Mechanismus, der die Kraft ausübt, ist die geleistete Arbeit eine Energieabgabe und also von vornherein mit dem $-$-Zeichen behaftet. Das $+$-Zeichen entsteht nur, wenn man die Energiebilanz betrachtet für das System, welches die Kraft nicht ausübt, und ist also sogar weniger plausibel als das $-$-Zeichen.

Behandlung der Vektorfelder überall auftauchen, da —grad div an die Stelle von grad conv kommt, restlos verschwinden. Die Zerlegung eines Vektorfeldes lautet z. B.:

$$\mathbf{v} = \text{grad pot conv } \mathbf{v} + \text{rot pot rot } \mathbf{v},$$

wo pot der Integraloperator $\int_{\infty} \frac{d\tau \ldots}{4\pi a}$ ist. Die Integrationstabellen der wirbelfreien Reihe p, $\mathbf{v}$, q und der quellenfreien Reihe $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sind:

	p	$\mathbf{v}$	q
p	conv grad pot p conv pot grad p pot conv grad p	conv pot $\mathbf{v}$ pot conv $\mathbf{v}$	pot q
$\mathbf{v}$	grad p	grad conv pot $\mathbf{v}$ grad pot conv $\mathbf{v}$ pot grad conv $\mathbf{v}$	grad pot q pot grad q
q	conv grad p	conv $\mathbf{v}$	conv grad pot q conv pot grad q pot conv grad q

	$\mathbf{a}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$
$\mathbf{a}$	rot rot pot $\mathbf{a}$ rot pot rot $\mathbf{a}$ pot rot rot $\mathbf{a}$	rot pot $\mathbf{v}$ pot rot $\mathbf{v}$	pot $\mathbf{w}$
$\mathbf{v}$	rot $\mathbf{a}$	rot rot pot $\mathbf{a}$ rot pot rot $\mathbf{a}$ pot rot rot $\mathbf{a}$	rot pot $\mathbf{w}$ pot rot $\mathbf{w}$
$\mathbf{w}$	rot rot $\mathbf{a}$	rot $\mathbf{v}$	rot rot pot $\mathbf{w}$ rot pot rot $\mathbf{w}$ pot rot rot $\mathbf{w}$

Alle —-Zeichen sind verschwunden und die Analogie zwischen Quellen und Wirbeln wird nicht mehr durch unnötige Vorzeichenwechsel getrübt [1]).

Da nun schon in der Vektoranalysis selbst naturgemäß drei Produkte vorkommen, $\cdot$, $\times$ und $\overset{\cdot}{\times}$, ist die Andeutung der Art des Produktes durch Klammern unzweckmäßig. Uebrigens verstößt diese Bezeichnung gegen die Regel, daß keine Bezeichnungen festgesetzt werden dürfen, die spätere Erweiterungen nicht zulassen. Schon bei Erweiterung zur gewöhnlichen Affinoranalysis (bis zu Größen zweiten Grades) käme man in Schwierigkeiten, wenn man auch dort die Produkte nur durch Klammern unterscheiden wollte.

Auch die Bezeichnung $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ für das skalare Produkt ist zu verwerfen, diese Bezeichnung muß unbedingt freigehalten werden für das allgemeine (dyadische) Produkt zweier Vektoren der Affinoranalysis. Aus diesem Grunde ist auch die Bezeichnung $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ für das Parallelepipedeum zu verwerfen. Will man hier durchaus kürzen, so könnte $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ empfohlen werden, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ doch Null ist. Richtiger und besonders Anfängern dringend zu empfehlen ist $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

[1]) Es konnte hier nur an einigen wenigen Beispielen der Vorzug des —-Zeichens demonstriert werden. Für mehrere Beispiele siehe man meine von Dr. Manders herausgegebenen Vorlesungen über Vektoranalysis (Nijgh & van Ditmar, Rotterdam, 1920).

7, 8). ∇ ist für sich kein Operator, sondern ein Operatorkern, der erst durch Zufügung einer Multiplikation zu einem Operator ergänzt wird. Dem —-Zeichen im skalaren Produkt entsprechend ist für $\nabla\cdot$ wirkend auf Vektoren wieder die ursprüngliche Maxwellsche Bezeichnung conv einzuführen.

Die Schwierigkeiten, auf welche die Vorbereitungskommission bei der Festlegung der Wirkungssphäre der Operatoren $\nabla\cdot$ und $\nabla\times$ gestoßen ist und die dazu geführt haben, daß über diese Wirkungssphäre überhaupt nichts festgesetzt ist, entstehen einzig und allein durch Verwendung von Klammern zur Andeutung der Art eines Produktes statt zur Gruppierung der Faktoren. Nur daher kommen Formeln wie die in der Erläuterung zu 8 vorkommende:

$$[\nabla\, \mathfrak{A}]\ [\nabla\, \mathfrak{B}] = \text{rot } \mathfrak{A}\ \text{rot } \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\ \text{rot rot } \mathfrak{B},$$

wo das erste ∇ links ruhig über ∇-umschließende Klammern hinwegdifferenziert, was dem gewöhnlichen mathematischen Brauch direkt entgegengesetzt ist. Es muß mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß die Vektoranalytiker, durch solche vollkommen unnötige Abweichungen von dem gewöhnlichen mathematischen Brauch der Vektoranalysis und dem rechnenden Praktiker den größten Schaden bereiten. Verwendet man Klammern nur dazu, wozu sie bestimmt sind, d. h. nur zu Gruppierungszwecken, so kommen solche Unzuträglichkeiten niemals vor. Es kann, wie in untenstehendem Entwurf angegeben ist, eine einfache Regel für die differenzierende Wirkung festgesetzt werden.

Eine solche Festsetzung ist geboten, wenn man überhaupt Bezeichnungen für Vektorgrößen festsetzen will; denn gerade Unterschiede in der Auffassung der Differentiation führen, viel eher als Unterschiede in den Bezeichnungen, zu Mißverständnissen und Fehlern.

Ausdrücke wie $\nabla_{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ werden schwerfällig, wenn der zu differenzierende Faktor einen Index trägt oder zusammengesetzt ist, z. B.:

$$\nabla_{\frac{\mathbf{r}}{r^m}} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^m}\right).$$

Besser ist es, durch einen Index anzugeben welche Stellung der Faktor im Produkt einnimmt:

$$\nabla_{II} \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^m}\right).$$

Es ist ein römischer Index zu wählen, da die arabischen Indizes zu einem anderen Zwecke nötig sind (vergl. 11).

9. Die Bezeichnung Grad φ, Div $\mathbf{a}$ und Rot $\mathbf{a}$ für die an Unstetigkeitsflächen auftretenden Differenzen sind durchaus unnötig. Die Ausdrücke:

$$\mathbf{n}\,(\varphi_2 - \varphi_1),\quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1),\quad \mathbf{n} \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$$

genügen vollkommen, sind fast nicht länger und lassen deutlich erkennen, worum es sich handelt. Dagegen sind die Bezeichnungen Grad usw. irreführend, da sie an grad, div und rot erinnern sollen, während doch Grad, Div und Rot gar keine Differentialoperatoren sind und auch den formalen Gesetzen dieser Operatoren in keiner Weise unterworfen sind. Aus demselben Grunde ist die Verwendung des Zeichens ∇ hier inkorrekt. Man soll die Einführung solcher Abkürzungen dem persönlichen Ermessen der Autoren überlassen, nicht aber Bezeichnungen vorschreiben, die nicht direkt nötig sind und deren Nutzen nicht allgemein anerkannt ist.

10. Das Alphabet enthält nicht so viele Buchstaben, daß man sich den Luxus erlauben könnte, drei Buchstaben **i**, **j**, **k** ein für allemal festzulegen und damit dem anderweitigen Gebrauche zu entziehen, wo ein Buchstabe mit drei Indizes $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ vollkommen ausreicht. Uebrigens sind die Indizes 1, 2, 3 ohnehin für die Bezeichnung der Bestimmungszahlen vorzuziehen (vergl. 11). Die vorgeschlagene Bezeichnung hat doch den Vorteil, daß sie für mehr als drei Dimensionen verwendbar bleibt.

11. Die Projektion eines Vektors ist selbstverständlich ein Vektor, der Ausdruck »vektorielle Projektion« enthält also eine Bestimmung zu viel. Die Komponente eines Vektors ist ebenfalls ein Vektor, der Ausdruck »skalare Komponente« ist also direkt falsch, gemeint sind hier die Bestimmungszahlen in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkrenz. Da Zahlenindizes sich schneller schreiben lassen als Buchstabenindizes, weniger Raum beanspruchen und auch für höhere Dimensionenzahl verwendbar sind, ist 1, 2, 3 statt x, y, z zu wählen. Es ist nicht klar, warum die Wahl des rechts- oder linkswendigen Achsenkreuzes nicht festgelegt ist. Wenn es irgend eine Sache gibt, die nichts mit den zugrunde liegenden Begriffen zu tun hat und nur durch eine Festsetzung geregelt werden kann, so ist es wohl gerade diese Wahl.

* * *

Entwurf.

1. Skalare werden im Druck mit nicht-fetten schrägen Buchstaben bezeichnet: a, A. Vektoren werden im Druck mit vertikalen fetten lateinischen Buchstaben bezeichnet: **a**, **A**. Schriftlich verwende man überstrichene Buchstaben.

   Quaternionen werden im Druck mit überstrichenen griechischen Buchstaben bezeichnet oder, wenn deutlich fette Buchstaben vorhanden sind, mit fetten griechischen Buchstaben: $\overline{\alpha}$ oder $\boldsymbol{\alpha}$.

2. Der Betrag eines Vektors **a** wird mit a bezeichnet, in Verbindungen mit $|\mathbf{a}|$, z. B. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$. Der Betrag eines Quaternions $\overline{\alpha}$ wird mit α_m bezeichnet, in Verbindungen mit $|\overline{\alpha}|$, z. B.: $|\overline{\alpha}+\overline{\beta}|$.

3. Der zum Vektor **a** gehörige Einheitsvektor wird mit $\mathbf{a}_1$ bezeichnet: $\mathbf{a} = a\,\mathbf{a}_1$. Bei besonderen Einheitsvektoren kann der Index 1 fortgelassen werden, z. B. $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, **t**, **n**, **b**.

   Der zum Quaternion $\overline{\alpha}$ gehörige Einheitsquaternion mit $\overline{\alpha}_1$ bezeichnet, der zugehörige Einheitsvektor mit $\mathbf{a}_1$, der zugehörige Winkel mit α: $\overline{\alpha} = \alpha_m\,\overline{\alpha}_1 = \alpha_m(\cos\alpha + \mathbf{a}_1 \sin\alpha)$.

4. Zur Darstellung der Vektorsummen und Vektordifferenzen dienen die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

5. Das Zeichen für das skalare Produkt ist $\cdot$. Es ist $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Zwischen einem Vektor und einem Skalar und zwischen zwei Skalaren kann das Zeichen fortgelassen werden. $\mathbf{a}^2$ bedeutet $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -a^2$.

6. Das Zeichen für das vektorische Produkt ist $\times$, für das quaternionische Produkt $\dot{\times}$. Das vektorische Produkt zweier Skalare oder eines Skalars mit einem Vektor ist Null. Es ist also $\dot{\times} = \cdot + \times$.

7. Der Hamiltonsche Operatorkern wird mit ∇ (sprich Nabla) bezeichnet. Der Operator $\nabla\cdot$ wirkend auf einen Skalar bezw. Vektor wird auch mit grad bezw. conv bezeichnet, der Operator $\nabla\times$ auch mit rot. Man schreibt nicht $\mathrm{rot}^2\,\mathbf{a}$ sondern rot rot **a**. Wirkt ein Operator nur differenzierend auf den ersten, zweiten usw. Faktor eines Produktes, so wird dies durch einen römischen Index angegeben, z. B. $\nabla_I \times (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathrm{rot}_I(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. $-\nabla^{2}\cdot$ kann durch $\triangle$ ersetzt werden. Der Integraloperator $\int_\infty \frac{d\tau\ldots}{4\pi a}$ wird mit pot bezeichnet.

8. Die differenzierende Wirkung der Operatoren erstreckt sich bis zur nächstfolgenden schließenden Klammer, deren zugehörende öffnende Klammer ∇ vorangeht.

9. Die Maßvektoren (drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren) werden mit $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ und $\mathbf{i}_3$ bezeichnet.

10. Die Projektion eines Vektors **a** auf die x-Achse werde mit $\mathbf{a}_1$ bezeichnet, die zur x-Achse gehörige Bestimmungszahl mit a_1 usw. Der Skalarteil eines Quaternions $\overline{\alpha}$ wird mit α_0 bezeichnet, die anderen Bestimmungszahlen mit α_1 usw. Es ist also

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$$

$$\overline{\alpha} = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i}_1 + \alpha_2\mathbf{i}_2 + \alpha_3\mathbf{i}_3.$$

Für die Bestimmungszahlen des Vektors **r** kann auch x, y, z geschrieben werden.

Es werde im allgemeinen stets ein rechtswendiges Achsenkreuz bevorzugt.

Delft. van Schouten. 175

Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. Der Aufsatz von Hencky über Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen[1]) bildet ein

[1]) Diese Zeitschr., 1921, S. 451.

vorzüglich durchgeführtes Beispiel für die Anwendung moderner Vektoralgebra, für das insbesondere wir von der älteren Generation dem Verfasser zu Dank verpflichtet sind. Ferner erkennt man, daß die Abschätzung von vermeintlichen Nebeneinflüssen auf Grund reiner »Anschauung« zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen kann. Im Zusammenhang hiermit verdient Erwähnung, daß die von mir entwickelten Formeln[1]), in welchen die Torsionssteifheit vernachlässigt war, einen richtigen mechanischen Sinn beibehalten, wenn man, wie im Wesen der behandelten Aufgabe liegt, voraussetzt, daß der knickende Kreisring durch die Zugstangen oder sonstwie, an der freien Verdrehung verhindert wird. Setzt man in den Gl. (1) von Hencky $\chi = 0$, also dauernd $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$, und fügt man zum Moment D ein um die Tangente drehendes Zwangmoment vom Betrage dF, auf die Ringlänge $a\,d\vartheta$ wirkend, hinzu, so bleibt die erste der Gleichgewichtsbedingungen (6): $Va = M' + D$ unverändert und führt auf die Differentialgleichung

$$\zeta^{(\mathrm{IV})} + \zeta''\left(\omega - \frac{1}{\lambda}\right) + \zeta\omega = 0.$$

Ist die Drehfestigkeit verschwindend klein, d. h. $C = 0$, so entsteht, wie man sich leicht überzeugt, gerade die von mir benutzte Differentialgleichung. Die Knickkraft bei Achterbildung nimmt dann den Wert

$$T_k = \frac{16}{3}\frac{JE}{a^2}$$

an. Die zweite Gleichgewichtsbedingung (6) muß das Zwangsmoment F berücksichtigen, und dient zu dessen Bestimmung.

Setzt man voraus, was etwa für ein Fahrrad nicht ganz unzutreffend sein mag, daß durch die Zwangsführung der Querschnittshauptachse die Neigung ζ aufgeprägt wird, so vereinfacht sich die Differentialgleichung mit $\chi = \zeta$ in

$$\zeta^{(\mathrm{IV})} + \zeta''(\omega + 1) + \zeta\omega = 0,$$

woraus sich die Knickkraft

$$T_k = 4\,\frac{JE}{a^2},$$

also merkwürdigerweise unabhängig von der Drehsteifheit erweist. Die Formeln von Hencky werden sich sicher noch in manchen anderen Sonderfällen als fruchtbar erweisen.

Zürich, 16. Februar 1922. 166

A. Stodola.

Herr Hencky, dem diese Zuschrift vor der Veröffentlichung vorgelegen hat, verzichtet auf eine Erwiderung. Der Herausgeber.

[1]) Dampfturbinen, IV. Aufl., S. 619.

Der adiabatische Elastizitätsmodul. In der auf S. 331 des 4. Heftes erwähnten Arbeit von Domke über die »Ergänzungsenergie elastischer Systeme« werden isothermische und adiabatische Aenderungen solcher Systeme untersucht und dabei der adiabatische Elastizitätsmodul definiert, der den isothermischen um ein geringes übertrifft.

Ich gestatte mir, darauf hinzuweisen, daß ich bereits in Heft 38 der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrg. 1918, S. 110, auf Grund einfacher diagrammatischer Betrachtungen des Verhaltens eines geraden, elastischen Stabes obigen Begriff eingeführt und benutzt habe. Diese Betrachtungen verfolgten den Zweck, das den Ingenieuren bislang nur wenig geläufige Gebiet der Thermodynamik fester Körper auf eine ähnliche Weise näher zu bringen, wie es bei den idealen Gasen mit Hilfe des $p = v$-Diagrammes geschieht, und zwar im besonderen unter Rücksichtnahme auf die Vorgänge in den Spiralen der Chronometer-Unruhen. Dabei zeigt sich, daß die Adiabate im Spannungs-Dehnungs-Diagramm etwas steiler verläuft als die Isotherme, so daß man eben berechtigt ist, von einem adiabatischen Elastizitätsmodul E_a zu sprechen, der nach den dort durchgeführten Ueberlegungen die Größe hat:

$$E_a = E_{is} \cdot \left[1 + \frac{A\,\alpha^2\,E_{is}\,T}{c_p\,\gamma}\right] \mathrm{kg/m^2},$$

worin A das kalorische Aequivalent der Arbeit, α den Wärmeausdehnungskoeffizienten, γ das spezifische Gewicht, c_p die spezifische Wärme bei konstanter Zugbeanpruchung und T die absolute Temperatur bedeuten.

Bei der Anwendung zeigt sich, daß z. B. ein gewöhnlicher eingespannter Balken von der Länge l sich unter der Einwirkung eines reinen Momentes (Unruhspirale mit Phillipsscher Endkurve) zunächst nur eine Biegung um $\frac{Ml}{E_a J}$ Bogeneinheiten erleidet, die aber während der Abwanderung der Wärme aus den Druck- in die Zugfasern allmählich auf den Wert $\frac{Ml}{E_{is} J}$ anwächst, wobei die Entropie um $3 \cdot \frac{A\alpha l M}{h}$ Wärmeeinheiten pro Grad zunimmt. Hierin ist h die klein gedachte Trägerdicke. Daß dieser Vorgang auf die Funktionen des seine eigenen Fehler summierenden Chronometers von größerem Einfluß ist, als sich nach seiner geringen Beachtung erwarten ließe, liegt auf der Hand.

Hamburg, den 12. Oktober 1921. Technische Staatslehranstalten. Bock. 115

(Redaktionsschluß 30. Juni 1922.)

Berichtigung.

In dem Aufsatz: Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen usw., S. 134, Zeile 17 und Zeile 10 von unten, lies:

$$A^2 + B^2 + A\frac{\partial B}{\partial \varphi} - B\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{statt} \quad A^2 + B^2 = A\frac{\partial B}{\partial \varphi} - B\frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Neuendorff.

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.